الرياضيات

- التقدير الإحصائي بنقطة والمقدرات المتسقة
- المماس والناظم، التقوس، المنشور والنواش في المنحنيات المستوية
- المجالات وحلقات الحدوديات
- الاحتمال الشرطي والحوادث المستقلة
- التحويلات الخطية
- الحقول
- التفاضل
- الرواسم والعمليات الثنائية



خلود علي حسن دار سلامة

www.darsafa.net

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَقُلِ ٱعْمَلُواْ فَسَيَرَى ٱللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُۥ وَٱلْمُؤْمِنُونَ ۖ وَسَتُرَدُّونَ

إِلَىٰ عَٰلِمِ ٱلْغَيْبِ وَٱلشَّهَٰدَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

الرياضيات

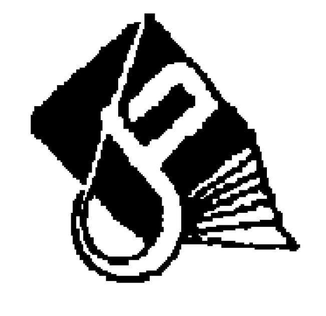


- التقدير الإحصائي بنقطة والمقدرات المتسقة
- المماس والناظم، التقوس، المنشور والنواش في المنحنيات المستوية
- المجالات وحلقات الحدوديات
- الاحتمال الشرطي والحوادث المستقلة
- التحويلات الخطية
- الحقول
- التفاضل
- الرواسم والعمليات الثنائية

خلود علي حسن دار سلامة

الطبعة الأولى

2014م - 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع ـ عمان

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2011/1/400)

510

سلامة، خلود علي حسن دار
الرياضيات: التقرير الأحصائي/ خلود علي حسن دار سلامة.ـ عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع 2011.
( ) ص
ر. أ: 2011/1/400
الواصفات: الرياضيات/

❖ يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى

الطبعة الأولى

2014م – 1435هـ



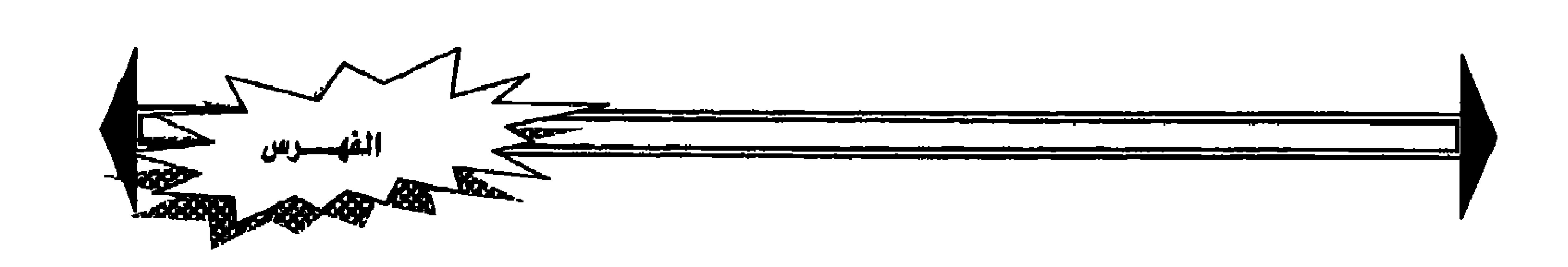
دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان ـ شارع الملك حسين ـ مجمع الفحيص التجاري ـ تلفاكس 4612190 6 962+
هاتف: 4611169 6 962+ ص. ب 922762 عمان ـ 11192 الأردن

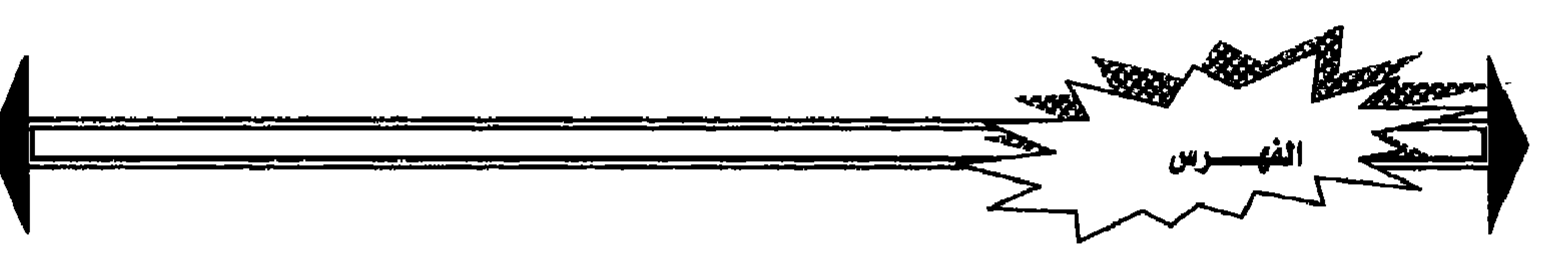
DAR SAFA Publishing - Distributing

Telefax: +962 6 4612190- Tel: + 962 6 4611169
P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan
http://www.darsafa.net
E-mail:safa@darsafa.net

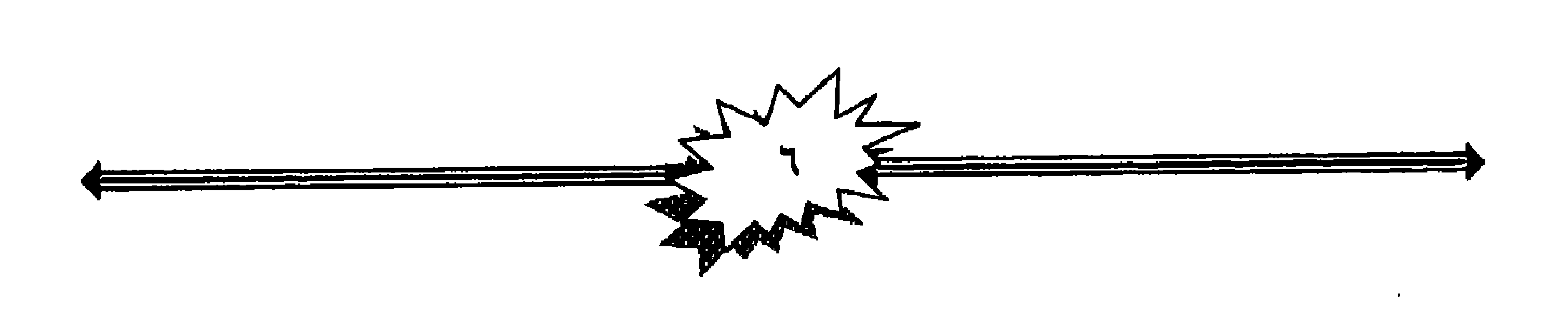
ISBN 978-9957-24-712-6 ردمك



الفهرس



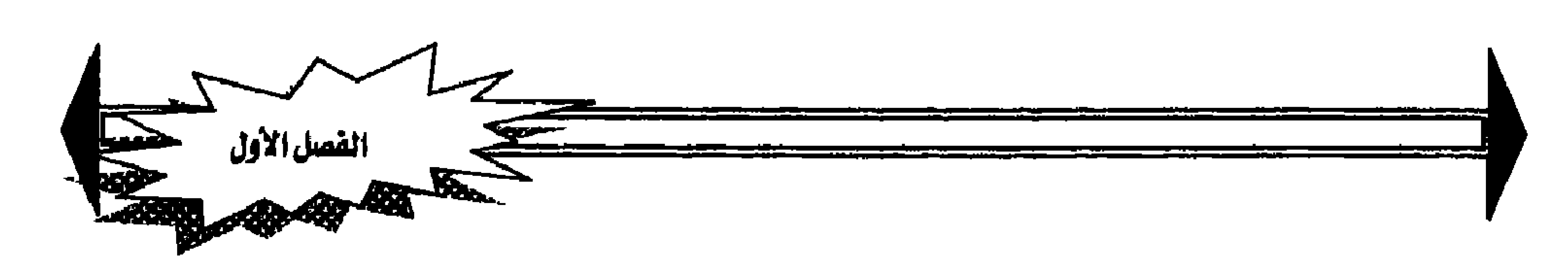
الفهـــرس





التقدير الإحصائي بنقطة والمقدّرات المتسقة

Statistical Point estimation



الفصل الأول

التقدير الإحصائي بنقطة والمقدّرات المتسقة

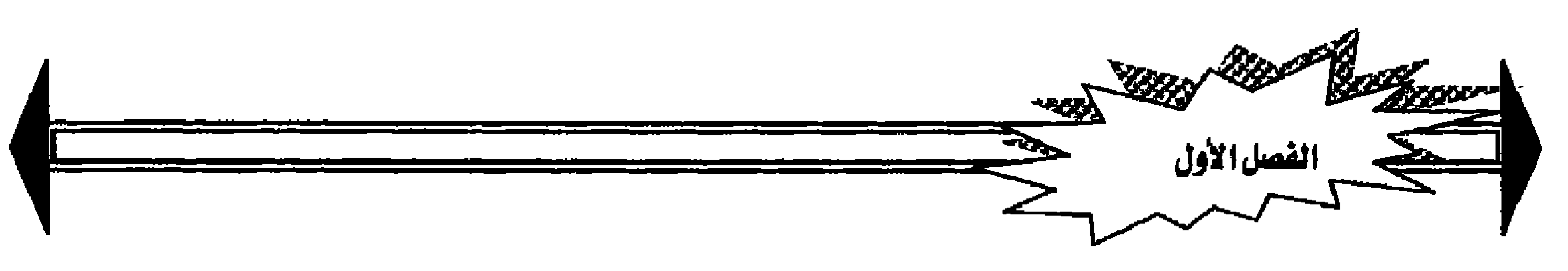
Statistical Point estimation

إن قيمة الدالة للتوزيع التجريبي في نقطة يمكن اعتبارها تقديراً لقيمة دالة التوزيع النظري في تلك النقطة، وأيضاً تعتبر مميزات عينة عشوائية (الوسط الحسابي الوسيط، التباين....الخ) تقديرات للميزات النظرية الموافقة لها (ثوابت أو معالم المجتمع الذي سحبت منه العينة) ومصطلح "تقدير" (estimation) بني أساساً على أنه من أجل عينة كبيرة الحجم، احتمال أن يكون الفرق كبيراً بين قيم المميزات المختلفة للعينة وقيم المميزات النظرية الموافقة لها صغير، ولهذا منطقياً (أي في الوسط من أجل عينات كبيرة الحجم) اعتبار مميزات العينة المشاهدة كقيم تقريبية جيدة للميزات النظرية الموافقة، عندما تكون هذه الأخيرة غير معلومة هكذا، في هذا المصطلح (مصطلح تقدير) يتموضع المدلول المحدد للتقارب.

عند استخدام النظرية الإحصائية في التطبيق غالباً نحتاج لإيجاد القيم التقريبية للميزات النظرية المختلفة للتوزيع المقترح (معالم الصفة المدروسة ع) عند أي حجم للعينة، ومنها المحدود.

فيما يلي نفترض لدينا نموذج إحصائي ما (عائلة التوزيعات من نوع معين): ق = {ق(س، θ)} الموافق لمنظومة تكرارات مستقلة من الملاحظات





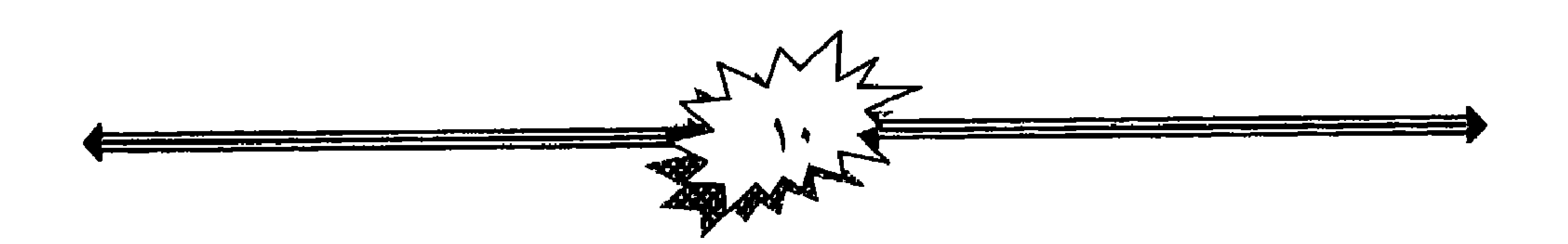
على متغير عشوائي ما ع، كما نفترض شروط الانتظام على النموذج ℘(س، θ) محققة، التي تضمن صحة النتائج والإثباتات الموافقة.

لتكن س = (س١،....سن) عينة من التوزيع ل(ع) ∋ ℘. هكذا المعلومة المسبقة عن المتغير العشوائي الملاحظ ع تتمثل في أن دالة توزيعه ℘(س، θ) عضوة في عائلة دوال التوزيع العلمية المعطاة ق، أي أن شكل (صيغة) دالة توزيع ع معلوم (إلا أنه يعتمد على المعلمة θ) وبمعرفة قيمة المعلمة θ يتحدد تماماً توزيع ع. وتصاغ بشكل عام مسألة تقدير المعلمة θ على النحو الآتي باستخدام المعطيات الإحصائية التي توفرها العينة العشوائية الملاحظة س الوصول إلى تقدير للقيمة الحقيقية ولنرمز لها بـ $\theta_\circ$ للمعلمة θ غير المعلومة.

ويمكن تلخيص الخطوات المتبعة لإيجاد التقدير النقطي (التقدير بنقطة) للمعلمة المجهولة θ بما يلي:

١- تعيين فئة القيم الممكنة للمعلمة غير المعلومة θ، وتسمى هذه الفئة عادة بفضاء العينة (Parametric space) ونرمز لها بـ Θ.

٢- اختيار الإحصاء المناسب ت = ت (س)، الذي قيمته عند ملاحظة معينة س = (س١،....، س٢) للعينة العشوائية س تتخذ كقيمة تقريبية جيدة $\theta_\circ$ (القيمة الحقيقية θ الموافقة لـ ل(ع)) وفي هذه الحالة يقال: أن الإحصاء ت = ت (س) يقدر θ أو الإحصاء ت مقدر لـ θ، وتدعى الدالة ت (س) بمقدر (estimator) المعلمة θ وقيمة المحسوبة من بيانات عينة مشاهدة س = (س١،...س٢) هي ت = ت(س) تسمى تقدير (estimate) للمعلمة θ.



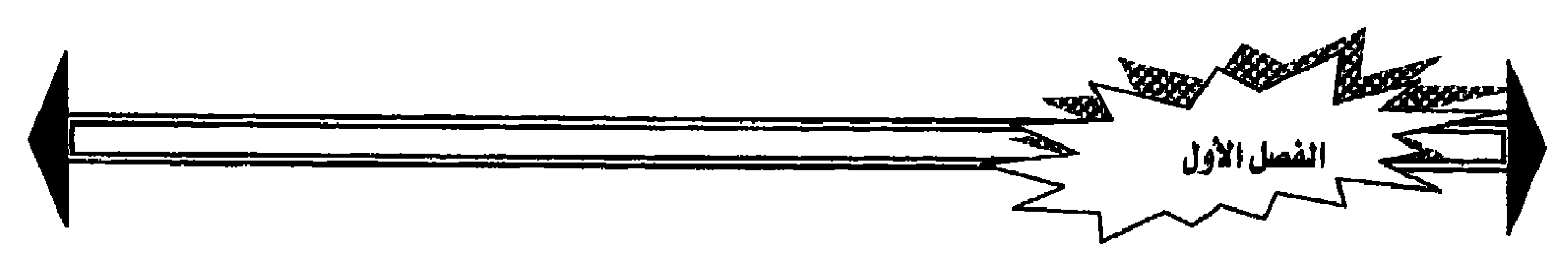
يوجد بشكل عام أكثر من إحصاء يصلح كمقدار لمعلمة التوزيع θ أي أن المقدرات لمعلمة θ يمكن أن يأخذ أشكالاً مختلفة فمثلاً $ت = \prod_{ي=1}^{ن} س_{ي}$، $ت = \sum_{ي=1}^{ن} س_{ي}$، $ت = \frac{س_{(ن)} - س_{(1)}}{2}$، $ت = س_{(ن)}$ و...الخ، إن كل مقدر يفترض فئة من القيم، وهذه الفئة عادة (ليس دائماً) تساوي فئة القيم الممكنة للمعلمة θ أي فضاء المعلمة θ، إذا رمزنا الفئة القيم الممكنة لـ ت بـ $\mathfrak{T}$ فإن $\mathfrak{T} \geq \theta$.

والتساؤل الذي يطرح نفسه الآن: كيف نقارن المقدرات المختلفة لمعلمة θ لاختيار أفضلها؟

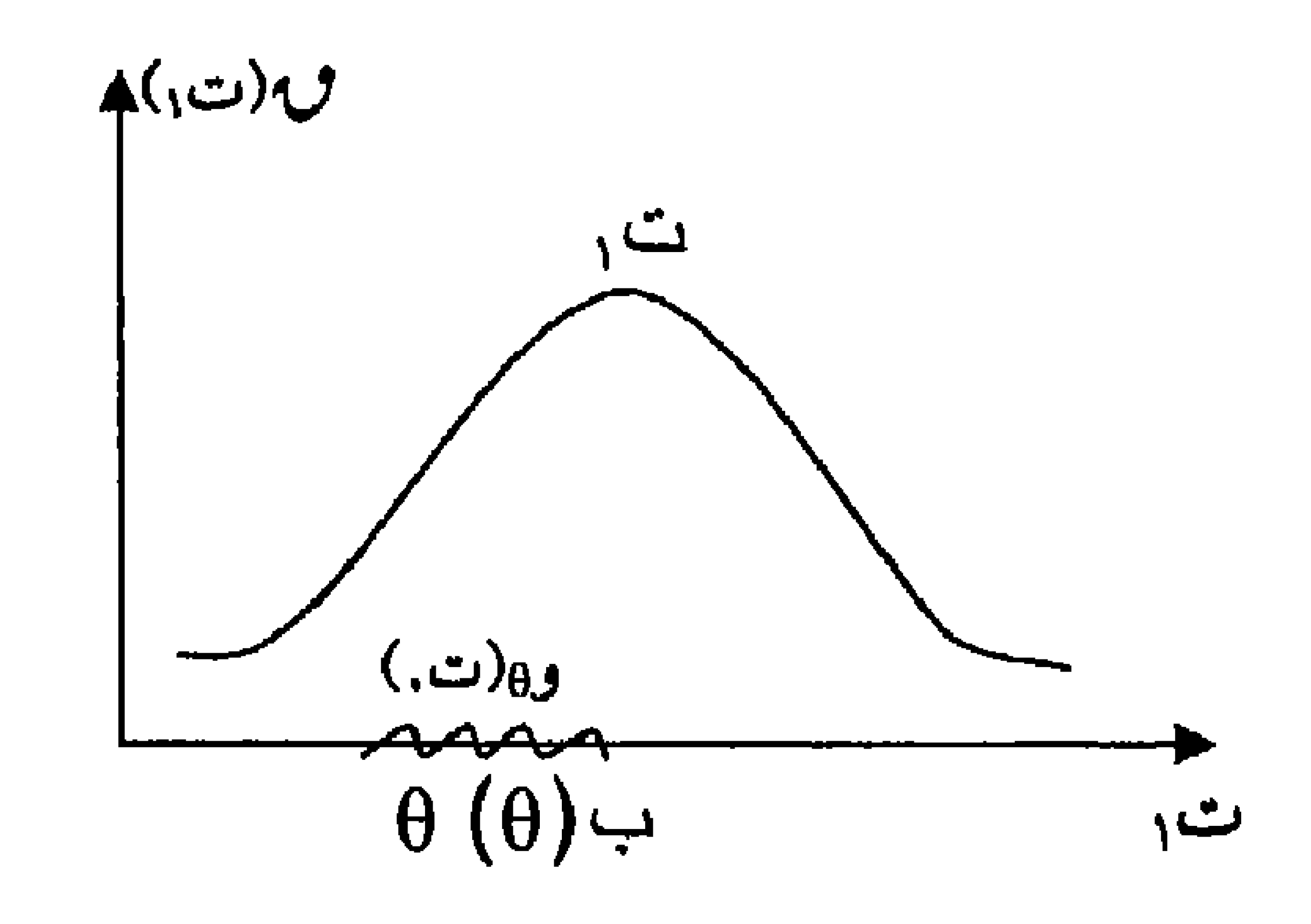
فمثلاً إذا كان $ت_{1} = ت_{1}$ (س) و $ت_{2} = ت_{2}$(س) مقدرين لمعلمة θ فأيهما تفضل؟ ولماذا؟

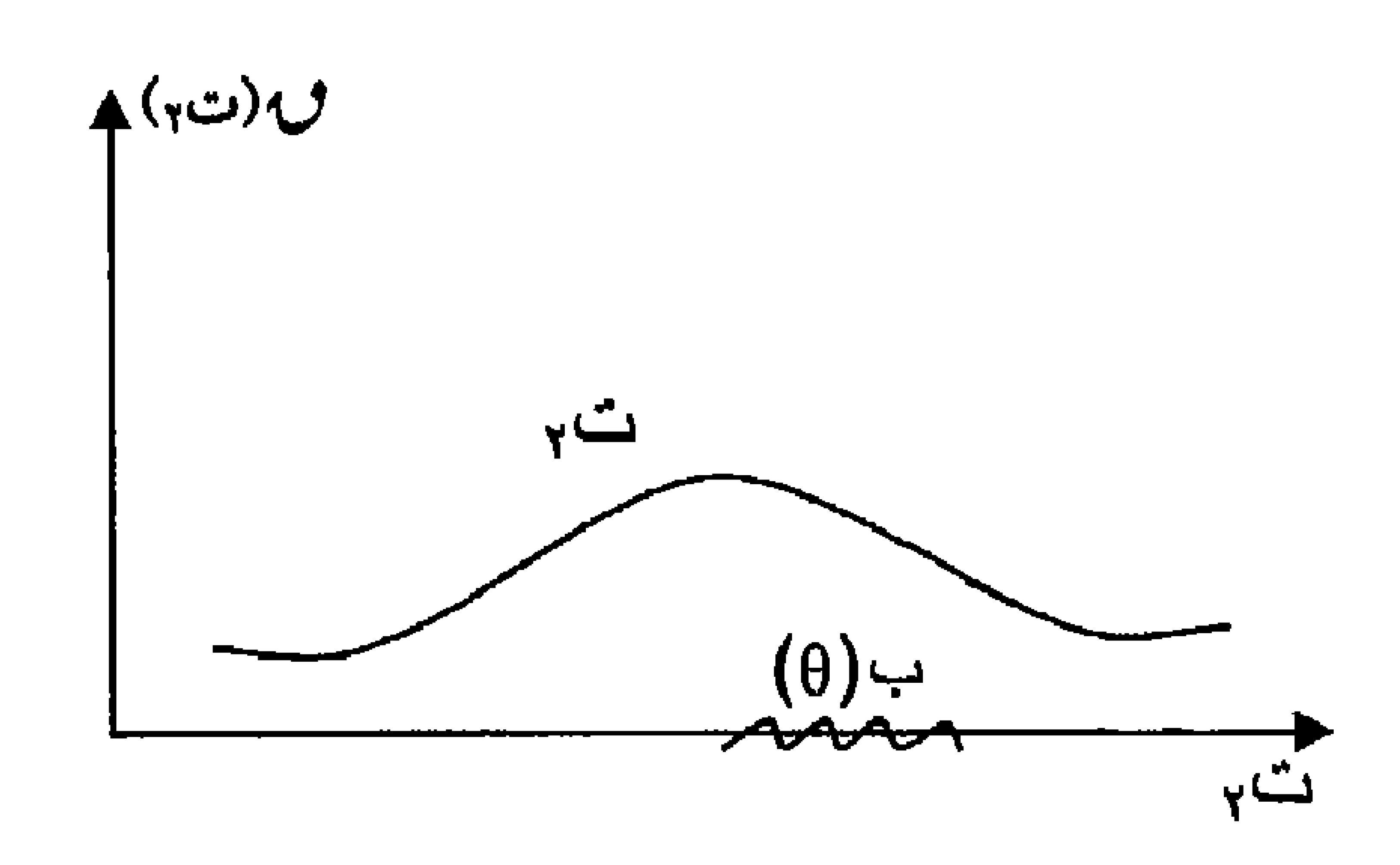
للإجابة على هذا التساؤل يلزمنا معيار للجودة، وذلك لمقارنة المقدرات المختلفة للمعلمة θ، وهذا المعيار بدوره ليس بالضرورة وحيداً، بل يمكن استخدام معايير مختلفة مرتبطة بالأهداف التي يبني المقدر من أجلها، إلا أن أي معيار لجودة مقدر يتحدد بالمقياس المتخذ لقياس قرب قيم المقدر من القيمة الحقيقية θ. للمعلمة المقدرة بالإضافة إلى ذلك، نقيد عائلة المقدرات ببعض الشروط وعلى ذلك، إذا تم تعيين عائلة المقدرات لمعلمة θ في نموذج إحصائي معطى وتم أيضاً اختيار مقياس القرب فإن المقدر ت الذي يوافق أصغر قيمة لذلك المقياس يعتبر الأفضل ضمن هذه العائلة من المقدرات.

كما نعلم أن كل مقدر ت = ت(س) هو عبارة عن إحصاء، أي هو متغير عشوائي، وبالتالي له توزيع احتمالي لحصل عليه من عينات عشوائية متكررة

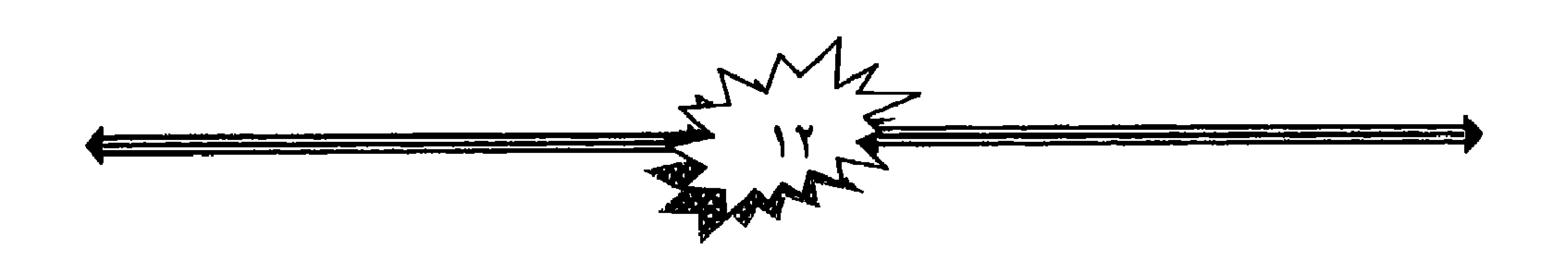


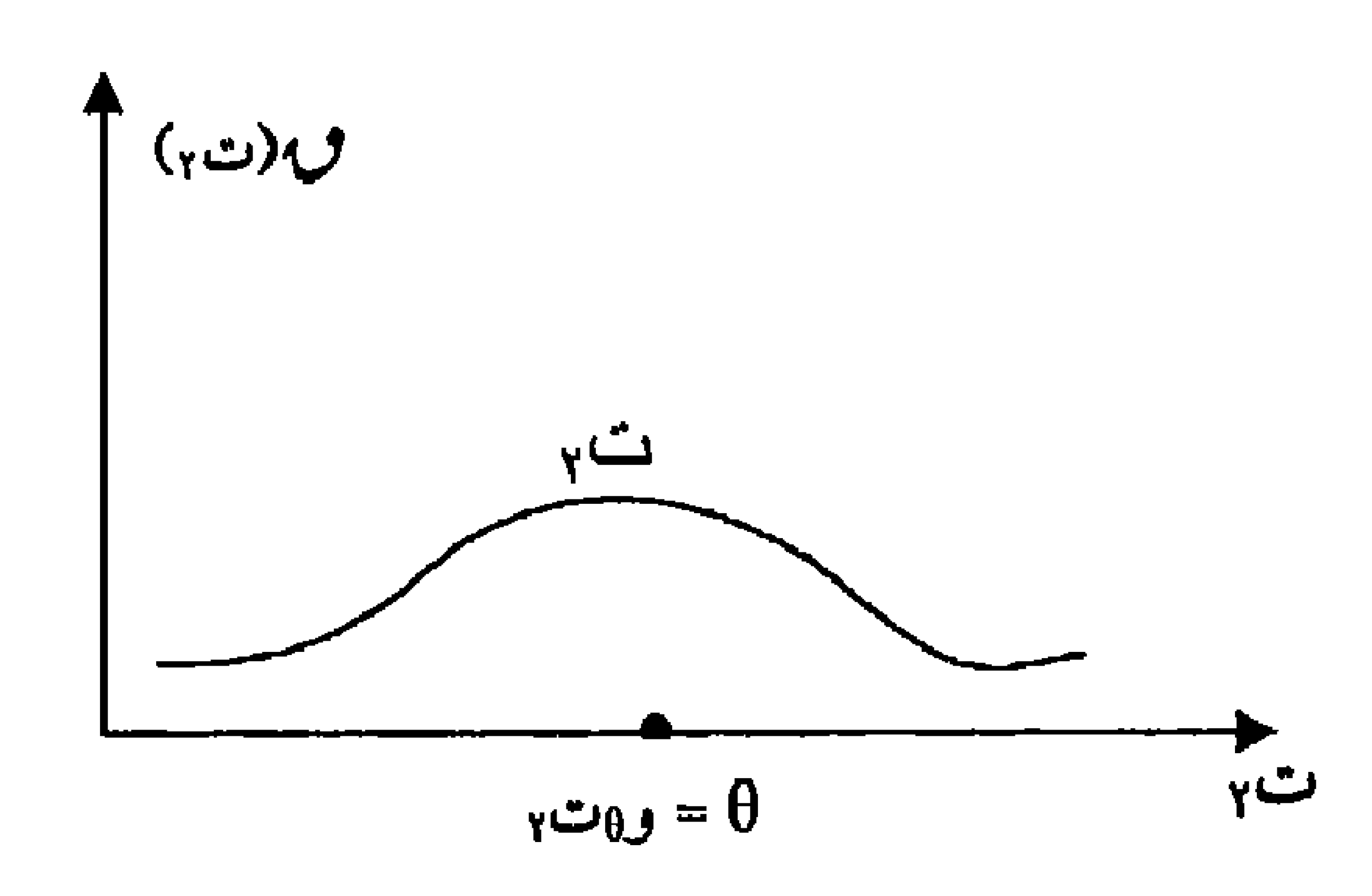
مسحوبة من توزيع المتغير العشوائي الملاحظ ع، ولحسن الحظ تتوفر طرق رياضية لاشتقاق مثل هذا التوزيع (توزيع ت). لذا، الشرط العام لبناء المقدرات النقطية ت(س) يتمثل في شرط التمركز (بهذا المفهوم أو ذاك) لتوزيع ت حول القيمة الحقيقية للمعلمة المقدرة، وكلما كانت درجة التمركز هذه أكبر كلما كان المقدر أفضل فمثلاً، ليكن المقدرين $ت_1$(س) و $ت_2$(س) للمعلمة θ، وتوزيع المعاينة لكل منها كما هو مبين على الشكلين الآتيين:

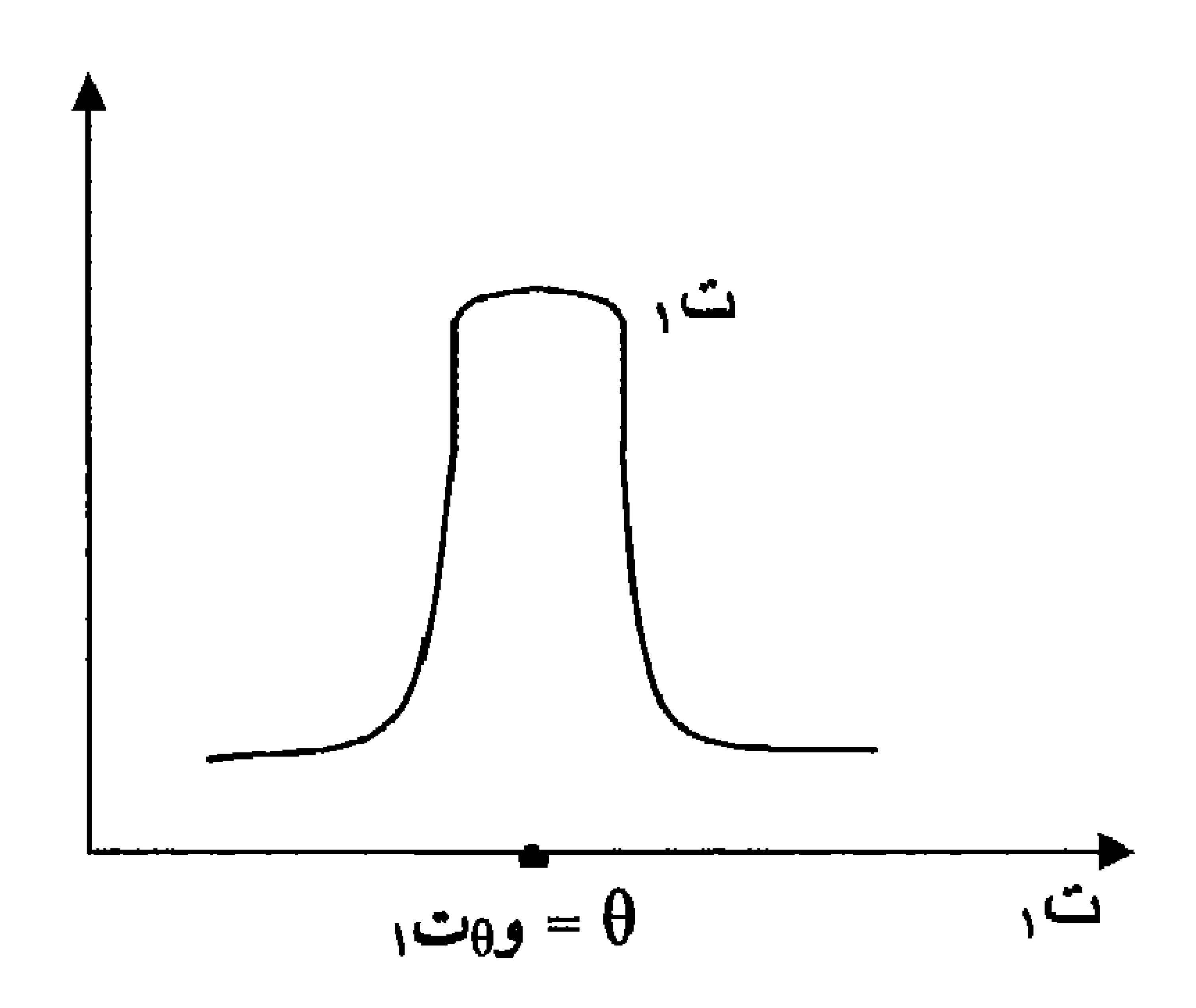




شكل (١)







شكل (٢)

نلاحظ من الشكل (١) أن: وت$_1$ ≈ θ ، وت$_2$ ≠ θ.

وأن معظم قيم ت$_1$ أقرب إلى θ إذا ما قورنت بقيم ت$_2$ نلاحظ من الشكل (٢) أن معظم قيم ت$_1$ متركزة حول θ على عكس قيم ت$_2$ وعلى ذلك فإن المقدّر ت$_1$ أفضل من المقدر ت$_2$ لتقدير المعلمة θ.

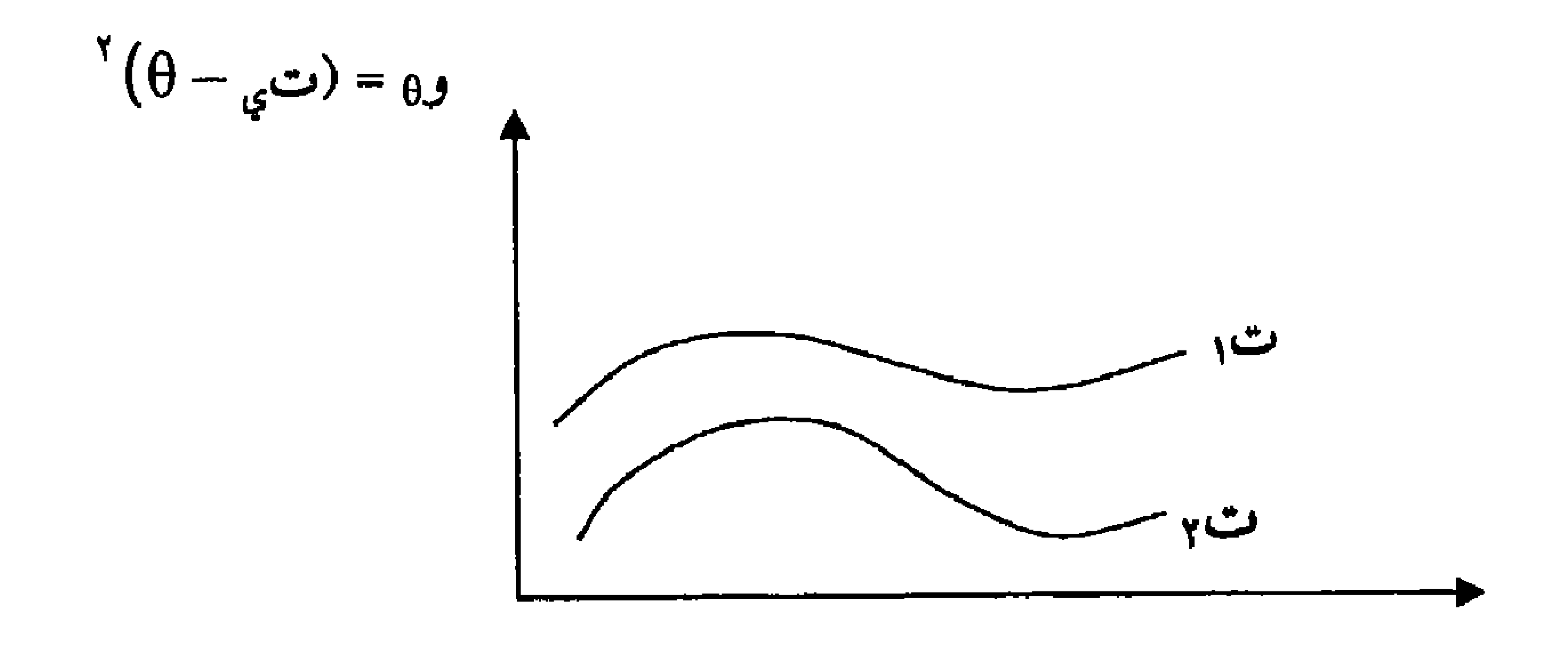
متوسط مربع الخطأ (Mean squared error).

إذا كانت س = (س١،....س٢) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع ل (ع)، صيغة دالة توزيعه ق(س، θ) معلومة، لكنها تعتمد على معلمة وحيدة البعد θ غير معلومة، وكان ت=ت(س) مقدراً θ فإن المقدار: و$_\theta$(ت − θ)^2

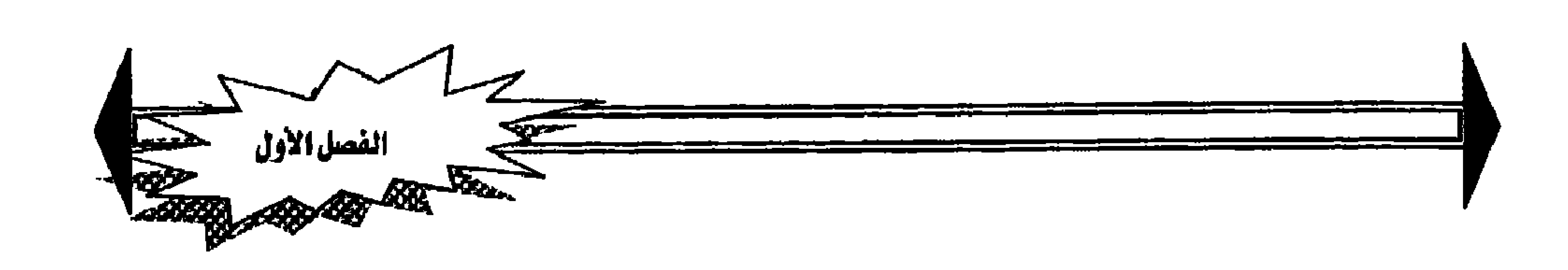
يـدعى بمتوسـط مربـع الخطـأ (mean squared error) للمقـدّر ت=ت(س) للمعلمة θ أو بمتوسـط الأخطـاء المربعـة للمقـدرات ويرمـز لـه بـ MSE (ت). وعلى ذلك فإننا نفضل المقدّر الذي له أقل متوسـط مربـع خطـأ. فمثلاً إذا كان ت١، ت٢ مقدّرين للمعلمة θ، فإننا نفضل ت١ على ت٢ إذا كان:

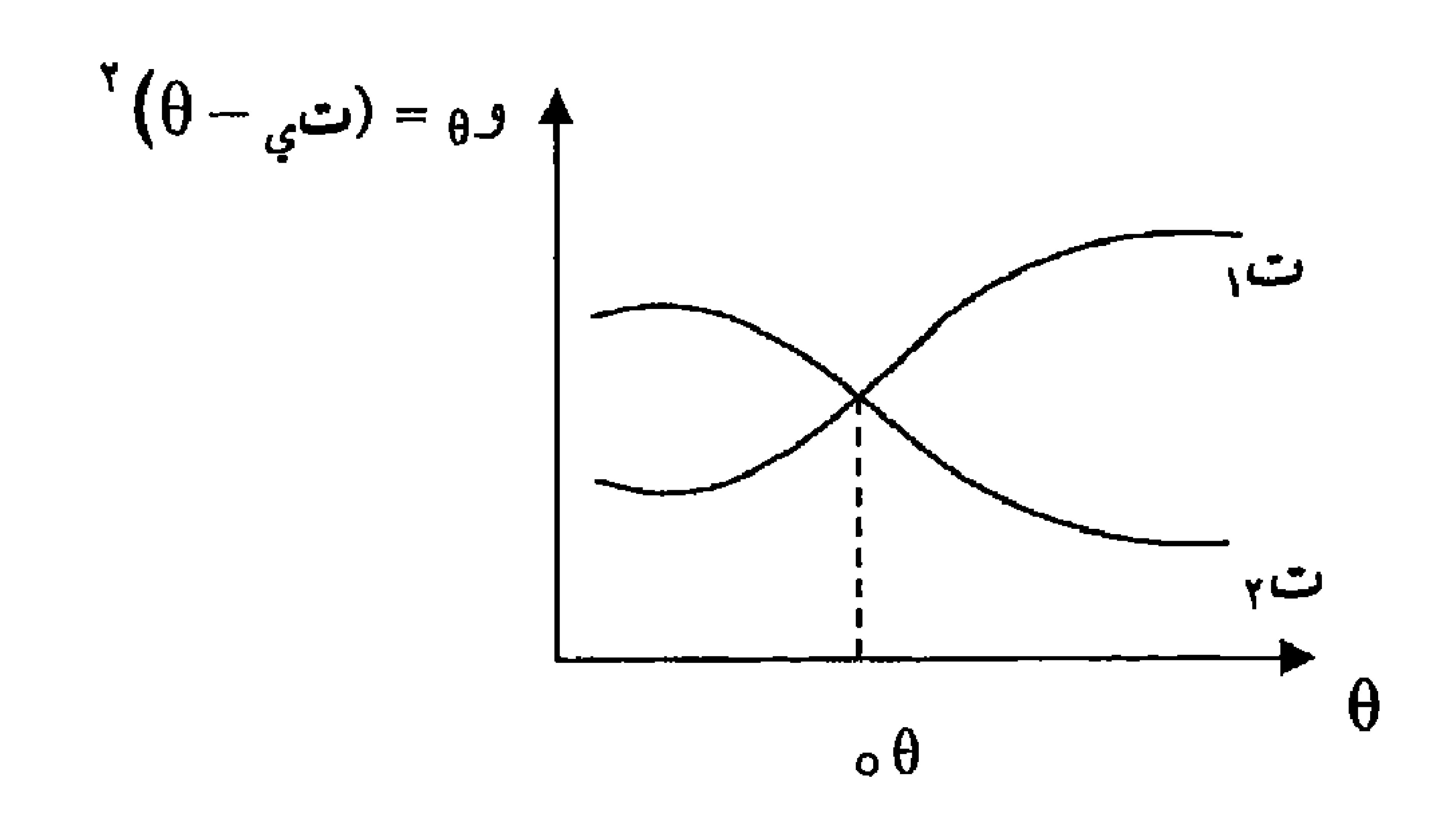
$$و_\theta(ت_1 - \theta)^2 < و_\theta(ت_2 - \theta)^2 \; ; \; \forall \theta \in \theta$$

لكن نادراً ما نجد مقدراً له أقل متوسط مربـع خطـأ لجميـع قـيم θ ∈ θ. فمثلاً نادراً ما نجد مثل الحالة المبينة على الشكل (١).



بينما على الغالب تصادفنا حالات من تلك المبينة على الشكل (٢).





الشكل (٢)

أي أن ت$_1$ أفضل من ت$_2$ لبعض قيم ($\theta > \theta_0$) θ وأن ت$_2$ أفضل من ت$_1$ لبعض القيم الأخرى لـ ($\theta < \theta_0$) θ

بناء على ما سبق يجب البحث عن معايير أخرى للمفاضلة بين المقدرات وهنالك بعض الصفات التي نرغب توفرها في المقدّر وهي:

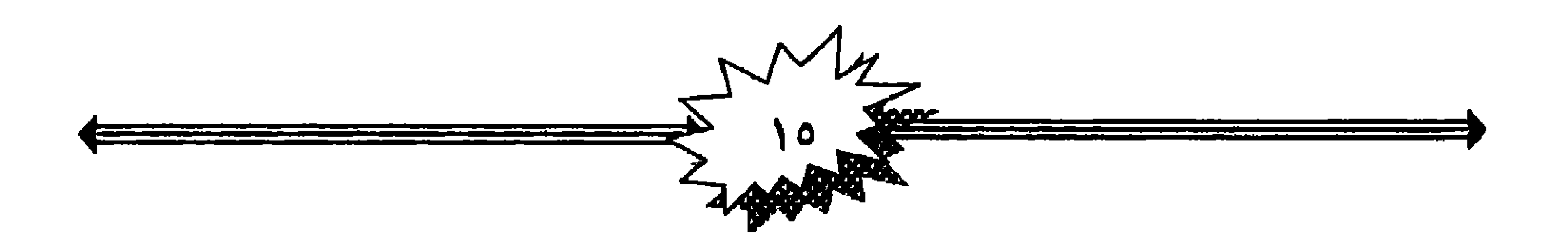
١- الكفاية (Sufficiency)

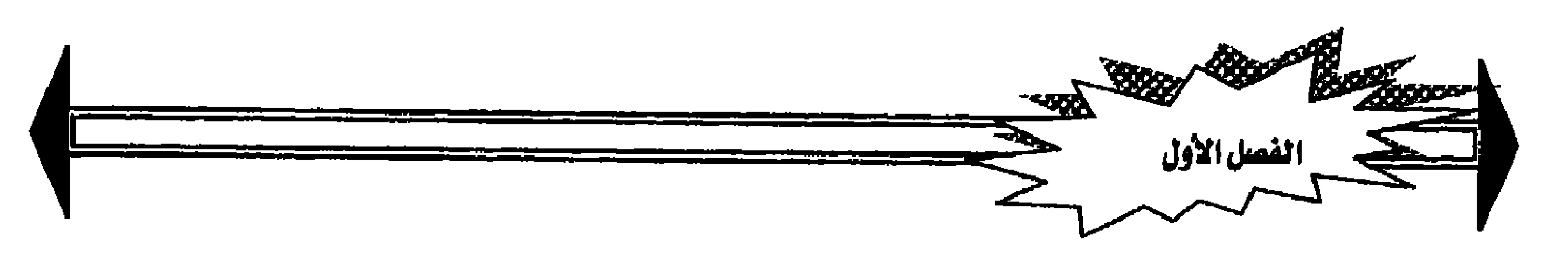
٢- عدم التحيز (unbiased ness)

٣- الاتساق (Consistency)

٤- الكفاءة (efficiency)

درسنا في الفصل الرابع الصفة الأولى، وسنتطرق في البنود التالية بشيء من التفصيل لبقية الصفات التي يفضل بشكل عام توفرها في المقدّر الجيد.





المقدّرات غير المتحيزة YNBAISED ESTIMATORS

إذا كان ت = ت (س) مقدّراً المعلمة θ في نموذج مفروض، فإن متوسط مربع الخطأ:

$$MES\ (\text{ت}) = \text{و}_{\theta}(\text{ت} - \theta)^{٢}$$

يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$\text{و}_{\theta}(\text{ت} - \theta)^{٢} = \text{و}_{\theta}[(\text{ت} - \text{و}_{\theta}\text{ت}) + (\text{و}_{\theta}\text{ت} - \theta)]^{٢}$$

$$= \text{و}_{\theta}(\text{ت} - \text{و}_{\theta}\text{ت})^{٢} + (\text{و}_{\theta}\text{ت} - \theta)^{٢} + ٢(\text{و}_{\theta}\text{ت} - \theta)\ \text{و}_{\theta}(\text{ت} - \text{و}_{\theta}\text{ت})$$

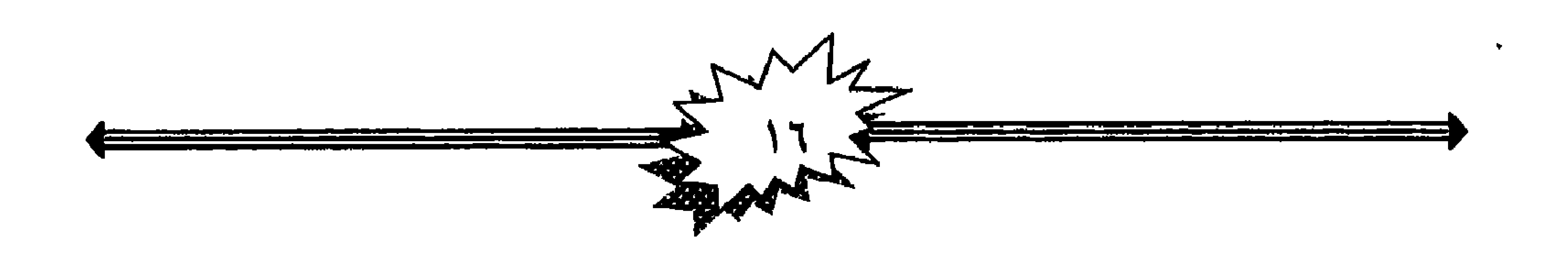
أي أن:

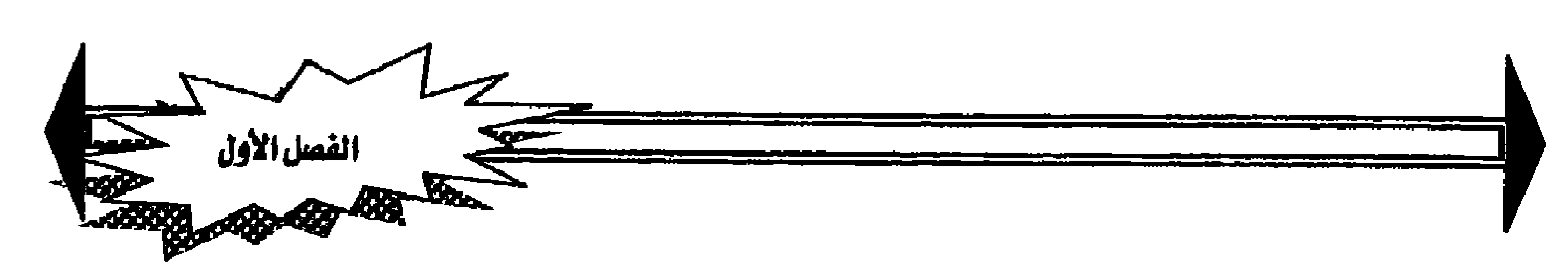
$$MES\ (\text{ت}) = \text{ف}_{\theta}\text{ت} + \text{ب}^{٢}(\theta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$\text{لأن ب}(\theta) = (\text{و}_{\theta}\text{ت} - \theta)\ \text{و}\ \text{و}_{\theta}(\text{ت} - \text{و}_{\theta}\text{ت}) = \text{و}_{\theta}\text{ت} - \text{و}_{\theta}\text{ت} = ٠$$

يسمى بـ (θ) بمقدار التحيز (biased) في الإحصاء ت كمقدّر للمعلمة θ، وهو يبين الفرق بين متوسط المقدّر ($\text{و}_{\theta}\text{ت}$)ت والمعلمة المقدّرة θ [انظر الشكل]

هكذا لاحظ أن متوسط مربع الخطأ المقدّر ت للمعلمة θ عبارة عن تباين المقدّر $\text{ف}_{\theta}\text{ت}$ مضافاً إليه مربع التحيز $\text{ب}^{٢}\theta$. وعلى ذلك فإن متوسط مربع خطأ مقدّر ت للمعلمة θ يكون أصغر ما يمكن إذا كان كل $\text{ف}_{\theta}\text{ت}$ و $\text{ب}^{٢}(\theta)$* أصغر ما يمكن، أي أن قيم المقدّر أقرب ما يمكن من المعلمة θ.





بما أن ب$^{2}(\theta)$ مقدار غير سالب وأصغر قيمة ممكنة له هي الصفر، ويحدث ذلك عندما $و_{\theta}$ت = θ أي أن متوسط ت ينطبق على المعلمة θ. وهذا يعني أنه لا يوجد تحيز في المقدّر ت (لا توجد أخطاء نظامية) وعندئذ يقال أن ت مقدّر غير متحيز (unbiased estimator) للمعلمة θ. وفي هذه الحالة متوسط مربع خطأ المقدّر ت مساوٍ لتباينه، أي أن $و_{\theta}$(ت − θ)^{2} = $ف_{\theta}$ت [أنظر الشكل].

تعريف: المقدّر غير المتحيز Unbiased Estimator

يقال عن الإحصاء ت = ت(س) أنه مقدّر غير متحيز للمعلمة θ (وحيدة البعد) إذا حقق الشرط:

$و_{\theta}$ت = θ ؛ $\forall\, \theta \in \theta$ ....(٢)

وإذا لم يحقق الإحصاء ت = ت(س) الشرط ( ) فيدعى بالمقدّر المتحيز (biased estimator) للمعلمة θ أي أن التقدير يشتمل على أخطاء نظامية.

أحياناً لا يطلب تقدير المعلمة θ فقط، وإنما بشكل عام دالة ما في θ نرمز لها بـ $\tau(\theta)$ وتدعى بدالة المعلمة. وفي هذه الحالة متوسط مربع خطأ المقدّر ت لدالة المعلمة $\tau(\theta)$.

$و_{\theta}$[ت − $\tau(\theta)$]^{2} = $ف_{\theta}$ت + ب$^{2}(\theta)$

حيث ب(θ) = [$و_{\theta}$ت − $\tau(\theta)$]. ويقال أن الإحصاء ت = ت(س) مقدّر غير متحيز لـ $\tau(\theta)$ إذا تحققت العلاقة:

$و_{\theta}$ت = $\tau(\theta)$ ؛ $\forall\, \theta \in \theta$ ....(٣)



نلاحظ مما سبق أن المقدّر غير المتحيز يعطي إلى حد ما في المتوسط تقديرات مقبولة، لكن هذا لا يعني أن قيم المقدر غير المتحيز، بشكل عام، تساوي $\tau(\theta)$ أو قريبة منها، وهذا يتوقف على درجة تشتت ت حول $\tau(\theta)$، أي على تباين المقدّر ت [انظر الشكل (٢)] هذا بالإضافة كما سنبين لاحقاً من أجل عائلة المقدّرات غير المتحيزة يمكن بناء مبرهنة مقيدة تطبيقاً وسهلة بكفاية، فيها مقياس تمركز (دقة) المقدّر عبارة عن تباينه. وهذا يعني أن نختار بين المقدرات غير المتحيزة على أساس تبايناتها وتفضل المقدر غير المتحيز بأقل تباين.

مثال: (١)

لتكن س = (س١،....س٢) عينة عشوائية من مجتمع توزيعه ل (ع) $\in$ ن(θ, σ^2) والمطلوب:

١- أثبت أن المقدرات الآتية للمعلمة θ غير متحيزة:

$$\text{ت}_1 = \frac{1}{\text{ن}-1}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}-1}\text{س}_\text{ي}\ ،\ \text{ت}_2 = \frac{1}{2}(\bar{\text{س}} + \text{س}_1)\ ،\ \text{ت}_3 = \frac{1}{3}(\bar{\text{س}} + \text{س}_1 + \text{س}_2)$$

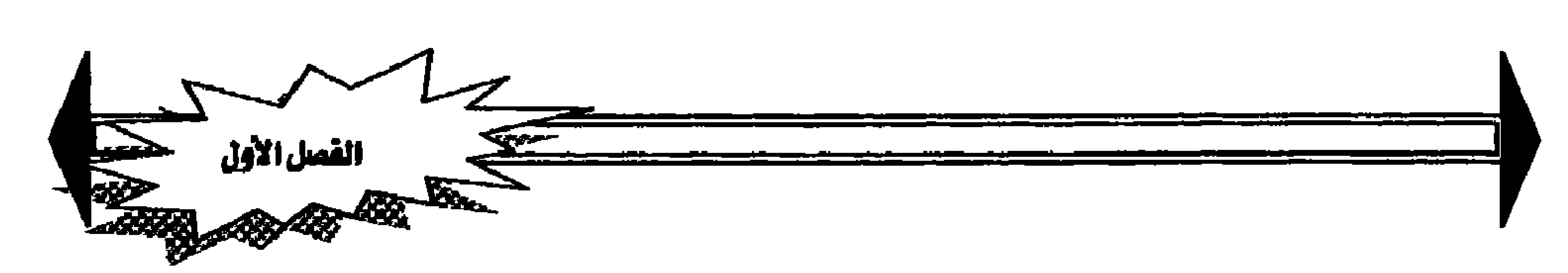
٢- أي المقدّرات الثلاث ي = ١، ٢، ٣، تعي أفضل مقدّر لـ θ.

لإثبات أن مقدّر ما للمعلمة θ غير متحيز، يجب إثبات تحقق العلاقة (٢) بماأن $\text{و}_\theta\text{ع} = \theta$ نجد:

$$\text{و}_\theta\text{ت}_1 = \text{و}_\theta\left(\frac{1}{\text{ن}-1}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}-1}\text{س}_\text{ي}\right) = \frac{1}{\text{ن}-1}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}-1}\text{و}_\theta\text{س}_\text{ي} = \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}-1}\theta = \theta$$

$$\text{و}_\theta\text{ت}_2 = \text{و}_\theta\left[\frac{1}{2}(\bar{\text{س}}+\text{س}_1)\right] = \frac{1}{2}(\text{و}_\theta\bar{\text{س}} + \text{و}_\theta\text{س}_1) = \frac{1}{2}(\theta+\theta) = \theta$$

$$\text{و}_\theta\text{ت}_3 = \text{و}_\theta\left[\frac{1}{3}(\bar{\text{س}}+\text{س}_1+\text{س}_2)\right] = \frac{1}{3}(\text{و}_\theta\bar{\text{س}}+\text{و}_\theta\text{س}_1+\text{و}_\theta\text{س}_2) = \frac{3\theta}{3} = \theta$$



إذن المقدرات الثلاث غير متحيزة لمتوسط المجتمع θ.

بما أن المقدرات الثلاث غير متحيزة، فإن المقدّر الأفضل هو الذي لـه أقـل تباين، لذا نحسب التباينات ي = ١، ٢، ٣، $\text{ف}_\theta \text{ت}_\text{ي}$:

$$\text{ف}_\theta \text{ت}_1 = \text{ف}_\theta\left(\frac{1}{\text{ن}-1}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}-1}\text{س}_\text{ي}\right) = \frac{1}{\text{ن}-1}\text{،}\ \sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}-1}\text{ف}_\theta\text{س}_\text{ي} = \frac{\text{ن}-1}{(\text{ن}-1)^2}\sigma^2$$

$$= \frac{1}{\text{ن}-1}\sigma^2$$

$$\text{ف}_\theta \text{ت}_2 = \text{ف}_\theta\left[\frac{1}{2}(\bar{\text{س}} + \text{س}_1)\right] = \frac{1}{4}\text{ف}_\theta\left(\frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ي}=2}^{\text{ن}}\text{س}_\text{ي} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\text{س}_1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\text{ن}^2}\sum_{\text{ي}=2}^{\text{ن}}\text{ف}_\theta\text{س}_\text{ي} + \frac{(\text{ن}+1)^2}{\text{ن}^2}\text{ف}_\theta\text{س}_1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\text{ن}-1}{(\text{ن})^2}\sigma^2 + \frac{(\text{ن}+1)^2}{\text{ن}^2}\sigma^2\right) =$$

$$\frac{\text{ن}+3}{4\text{ن}}\sigma^2$$

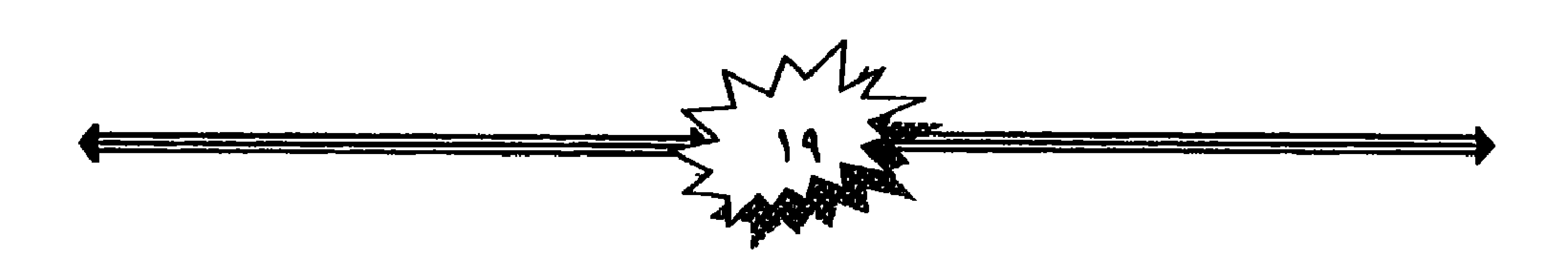
$$\text{ف}_\theta \text{ت}_3 = \text{ف}_\theta\left[\frac{1}{3}(\bar{\text{س}} + \text{س}_1 + \text{س}_2)\right] = \frac{1}{9}\text{ف}_\theta(\bar{\text{س}} + \text{س}_1 + \text{س}_2)$$

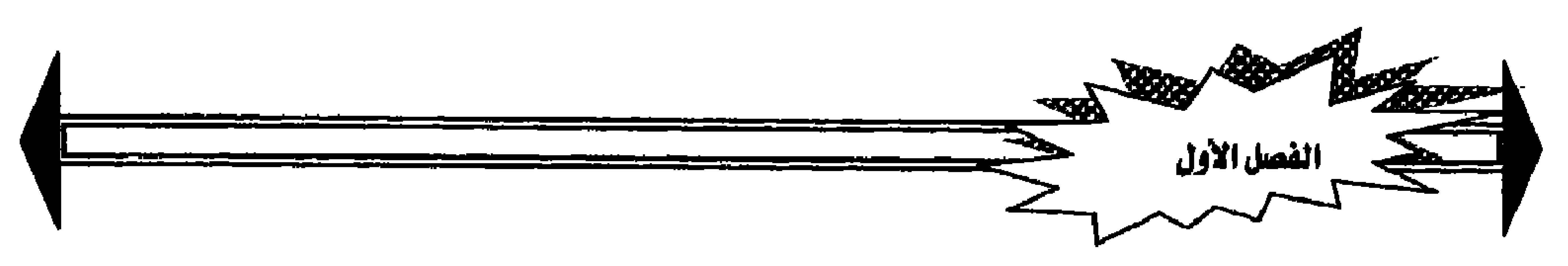
$$= \frac{1}{9}\text{ف}_\theta\left(\frac{1}{\text{ن}^2}\sum_{\text{ي}=3}^{\text{ن}}\text{س}_\text{ي} + \frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}\text{س}_1 + \frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}\text{س}_2\right)$$

$$= \text{ف}_\theta\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\text{ن}^2}\sum_{\text{ي}=3}^{\text{ن}}\text{ف}_\theta\text{س}_\text{ي} + \frac{(\text{ن}+1)^2}{\text{ن}^2}\text{ف}_\theta\text{س}_1 + \frac{(\text{ن}+1)^2}{\text{ن}^2}\text{ف}_\theta\text{س}_2\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\text{ن}^2}\sum_{\text{ي}=3}^{\text{ن}}\text{ف}_\theta\text{س}_\text{ي} + \frac{(\text{ن}+1)^2}{\text{ن}^2}\text{ف}_\theta\text{س}_1 + \frac{(\text{ن}+1)^2}{\text{ن}^2}\text{ف}_\theta\text{س}_2\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(\text{ن}-2)}{\text{ن}^2}\sigma^2 + \frac{(\text{ن}+1)^2}{\text{ن}^2}\sigma^2 + \frac{(\text{ن}+1)^2}{\text{ن}^2}\sigma^2\right) = \frac{(2\text{ن}+5)}{9\text{ن}}\sigma^2$$





بمقارنة التباينات الثلاث نجد أن تباين المقدّر $ت_١$ هو الأصغر، وبالتالي فهو المقدّر الأفضل ضمن تلك المقدرات.

مثال (٢):

إذا كان س = ($س_١$، ......$س_ن$) عينة عشوائية من مجتمع يتبع التوزيع الأسي G(١،θ) فالمطلوب:

١- أثبت أن $ت_١ = \frac{١}{٢}(\overline{س} + س_١)$ مقدر غير متحيز للمعلمة θ واحسب تباينه.

٢- أثبت أن $ت_٢ = \frac{ن}{ن+١}\overline{س}^٢$ مقدر غير متحيز للدالة $\tau(\theta) = \theta^2$.

٣- أوجد قيمة ج التي تجعل $ت_٣ = \frac{ج}{\overline{س}}$ مقدّراً غير متحيز لـ $\tau(\theta) = \frac{١}{\theta}$.

كما نعلم إذا كان ع متغيراً عشوائياً خاضعاً للتوزيع G(١،θ) فإن كثافة توزيعه الاحتمالية:

$$ق(س، \theta) = \frac{١}{\theta} هـ^{-\frac{س}{\theta}} \quad ; \quad س > ٠ \quad ، \quad \theta > ٠$$

وأن:

$$و_\theta ع = \theta \quad ، \quad و_\theta ع^٢ = ٢\theta^٢ \quad ، \quad ف_\theta ع = \theta^٢.$$

وعلى ذلك: $و_\theta ت_١ = \frac{١}{٢} و_\theta(\overline{س} + س_١) = \frac{١}{٢}(و_\theta \overline{س} + و_\theta س_١) = \frac{١}{٢}(\theta + \theta) = \theta$

أي أن $ت_١$ مقدّر غير متحيز للمعلمة θ.



$$ف_\theta ت_١ = \frac{١}{٤} ف_\theta(\bar{س} + س_١) = \frac{١}{٤} ف_\theta(\frac{١}{ن}\sum_{ي=٢}^{ن} س_ي + \frac{ن+١}{ن} س_١).$$

$$= \frac{١}{٤}[\frac{١}{ن^٢}\sum_{ي=٢}^{ن} ف_\theta س_ي + \frac{(ن+١)^٢}{ن^٢} ف_\theta س_١] = \frac{١}{٤}[\frac{(ن-١)}{ن^٢}\theta^٢ + \frac{(ن+١)^٢}{ن^٢}\theta^٢]$$

$$= \frac{ن+٣}{٤ن}\theta.$$

$$و_\theta ت_٢ = \frac{ن}{ن+١} و_\theta \bar{س}^٢ = \frac{ن}{ن+١}[ف_\theta \bar{س} + (و\bar{س})^٢] = \frac{ن}{ن+١}$$

$$\left(\frac{\theta^٢}{ن}+\theta^٢\right)$$

$$= \frac{ن}{ن+١}\;\frac{ن+١}{ن}\theta^٢ = \theta^٢$$

وهذا يعني أن $ت_٢$ مقدر غير متحيز لـ $\tau(\theta) = \theta^٢$.

نلاحظ أن:

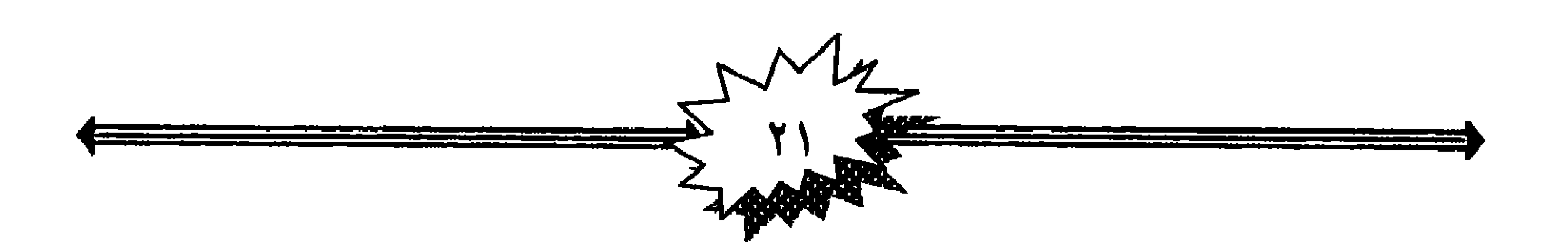
$$ت_٣ = \frac{جـ}{\bar{س}} = \frac{ن جـ}{\sum س_ي} = \frac{ن جـ}{ك} \quad ; \quad ك = \sum_{ي=٢}^{ن} س_ي$$

وكما أشرنا سابقاً فإن المتغير العشوائي ك يخضع للتوزيع τ(ن، θ)، أي أن:

$$ص(ك، \theta) = \frac{١}{\theta^{ن}\Gamma(ن)} ك^{ن-١} هـ^{-ك/\theta} \quad ، ك > ٠$$

ومنها نجد:

$$و_\theta(\frac{١}{ك}) = \frac{١}{\theta^{ن}\Gamma(ن)} \int_٠^\infty \frac{١}{ك} ك^{ن-١} هـ^{-ك/\theta} د\theta = \frac{١}{\theta^{ن}\Gamma(ن)} \int_٠^\infty ك^{ن-٢} هـ^{-ك/\theta} د\theta$$



وبوضع $ع = \frac{ك}{\theta}$ نحصل على:

$$و_\theta\left(\frac{1}{ك}\right) = \frac{1}{\theta^{ن}\Gamma(ن)} \int_0^\infty (\theta ع)^{ن-2} هـ^{-ع} \theta د ع$$

$$= \frac{1}{\theta^{ن}\Gamma(ن)}\, \theta^{ن-1} \int_0^\infty ع^{ن-2} هـ^{-ع} دع = \frac{1}{\theta^{ن}\Gamma(ن)}\, \theta^{ن-1}\, \Gamma(ن-1) = \frac{1}{ن-1}\,\frac{1}{\theta}$$

وعلى ذلك فإن $و_\theta\left(\frac{جـ}{\bar{س}}\right) = و_\theta\left(\frac{ن جـ}{ك}\right) = ن جـ و_\theta\left(\frac{1}{ك}\right) = \frac{ن جـ}{ن-1}\,\frac{1}{\theta}$

ولكي يكون $ت_3 = \frac{جـ}{\bar{س}}$ مقدراً غير متحيز لـ $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$، يجب أن يتحقق شرط عدم التحيز (٣)، أي أن:

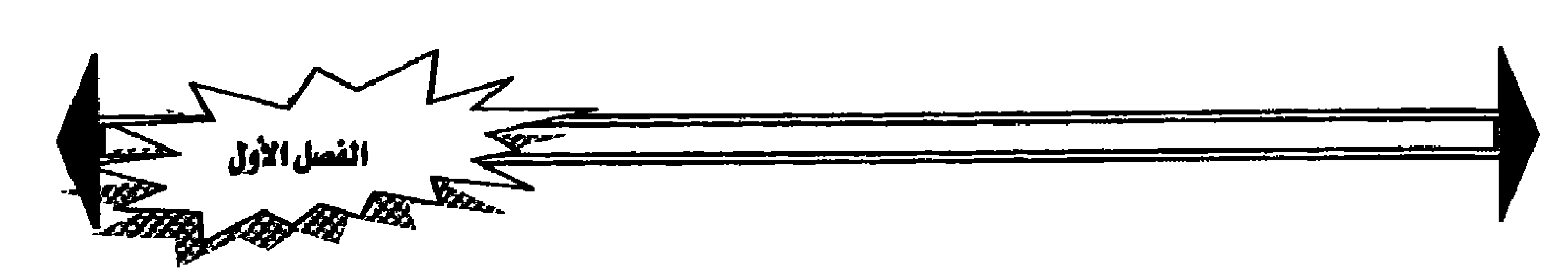
$$\frac{جـ ن}{(ن-1)\theta} = \frac{1}{\theta} \qquad \text{ومنها نجد: } جـ = \frac{ن-1}{ن}$$

أي أن:

$$ت_3 = \frac{ن-1}{ن\bar{س}} = \frac{ن-1}{\sum_{ي=1}^{ن} س_ي}$$

مثال (٣): إذا كانت س = ($س_1$،...$س_ن$) عينة عشوائية من مجتمع يخضع لتوزيع بيرنولي ب (١، θ)، فالمطلوب:

١- بين أي من المقدرات الآتية لـ(θ) غير متحيز، ثم أوجد مقدار التحيز للمقدرات المتحيزة:



$ت_1 = ٢\overline{س} - س_1$ ، $ت_2 = \overline{س} - س_1$ ، $ت_3 = \frac{س_1 + س_2}{٢}$ ، $ت_4 = \frac{\overline{س}}{٢}$ ٢-

ما هو المقدار الأفضل بين المقدرات غي المتحيزة؟

كما نعلم، إذا كان ع متغير عشوائي خاضع لتوزيع ب (١، θ) فإن:

$ل(س، \theta) = \theta^{س}(١ - \theta)^{١-س}$ ؛ س = ١، ٢ $\cdot < \theta < ١$

$و_\theta ع = \theta$ ، $ل_\theta ع = \theta(١ - \theta)$

وعلى ذلك:

$و_\theta ت_1 = و_\theta(٢\overline{س} - س_1) = ٢و_\theta \overline{س} - و_\theta س_1 = ٢\theta - \theta = \theta$

$و_\theta ت_2 = و_\theta(\overline{س} - س_1) = و_\theta(\overline{س}) + و س_1 = \theta + \theta = ٢\theta \neq \theta$ و

$ب(\theta) = ٢\theta - \theta = \theta$

$و_\theta ت_3 = و_\theta\left(\frac{س_1 + س_2}{٢}\right) = \frac{١}{٢} و_\theta س_1 + \frac{١}{٢} و_\theta س_2 = \frac{١}{٢}\theta + \frac{١}{٢}\theta = \theta$

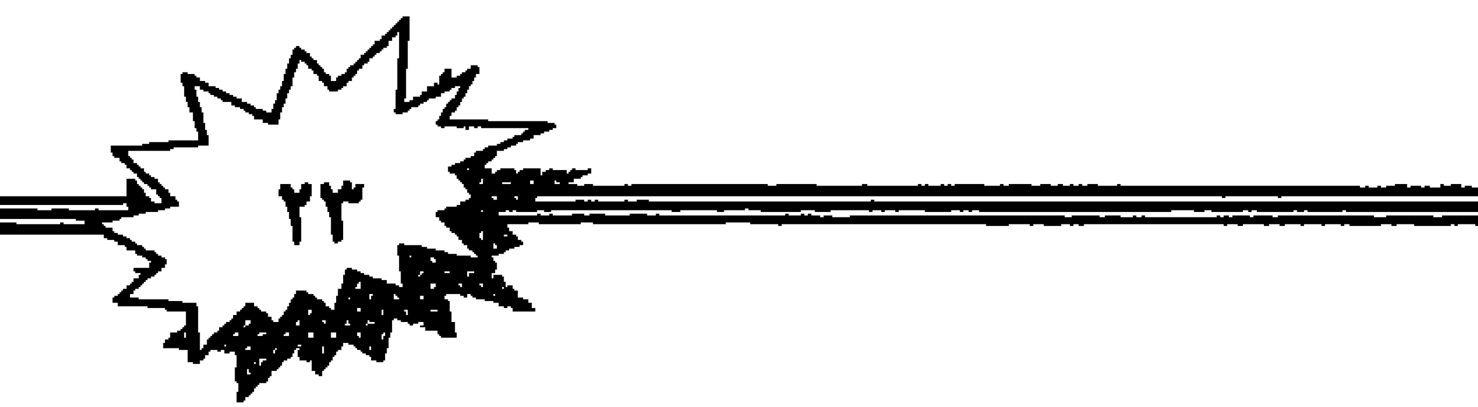
$و_\theta ت_4 = \frac{١}{٢} و \overline{س} = \frac{١}{٢}\theta \neq \theta$; $ب(\theta) = و_\theta ت_4 - \theta = \frac{١}{٢}\theta - \theta = -\frac{١}{٢}\theta$

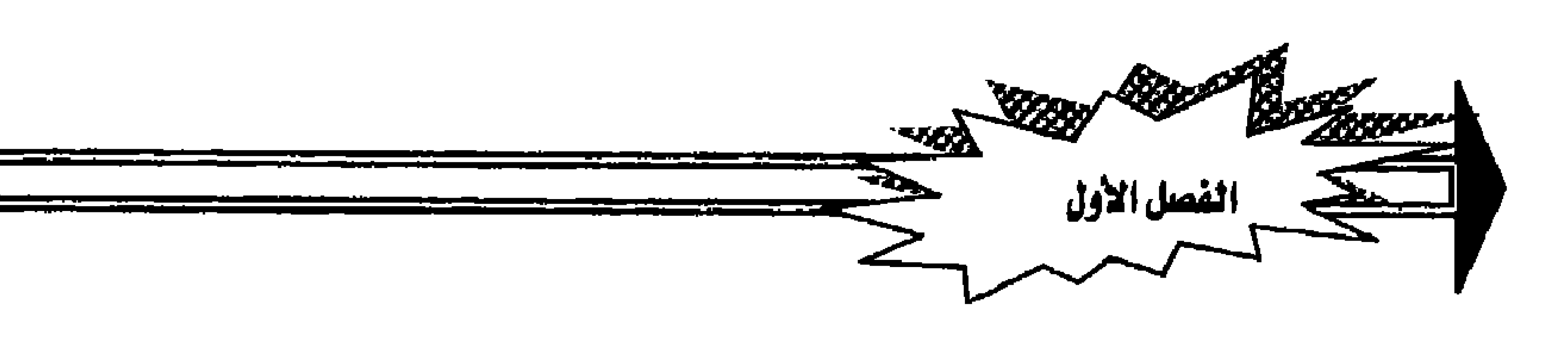
وهذا يعني أن كل من المقدرين $ت_1$، $ت_2$ غير متحيـز، بينمـا كـل مـن $ت_2$ $ت_4$ متحيز. لنحسب الآن التباينات:

$ل_\theta ت_1 = ل_\theta(٢\overline{س} - س_1) = ل_\theta(\frac{٢}{ن}\sum_{ي=٢}^{ن} س_ي - \frac{ن-٢}{٢} س_1)$

$= \frac{٤}{ن^٢}\sum_{ي=٢}^{ن} ل_\theta س_ي + \frac{(ن-٢)^٢}{ن^٢} ل_\theta س_1 = \frac{٤(ن-١)}{ن^٢}[\theta(١-\theta)] +$

$\frac{(ن-٢)^٢}{٢}[\theta(١-\theta)]$





$$= \frac{٤(ن-١)+(ن-٢)^{٢}}{ن^{٢}}[\theta\,(١-\theta)] = \theta\,(١-\theta)$$

$$ف_{\theta}ت_{٢} = ف_{\theta}\,(\overline{س} + س_{١}) = ف_{\theta}\,\left(\frac{١}{ن}\sum_{ي=٢}^{ن} س_{ي} + \frac{ن+١}{ن}س_{١}\right)$$

$$= \frac{(ن-١)}{ن^{٢}}[\theta\,(١-\theta)] + \frac{(ن+١)^{٢}}{ن^{٢}}[\theta\,(١-\theta)] = \frac{(ن+٣)}{ن}[\theta\,(١-\theta)]$$

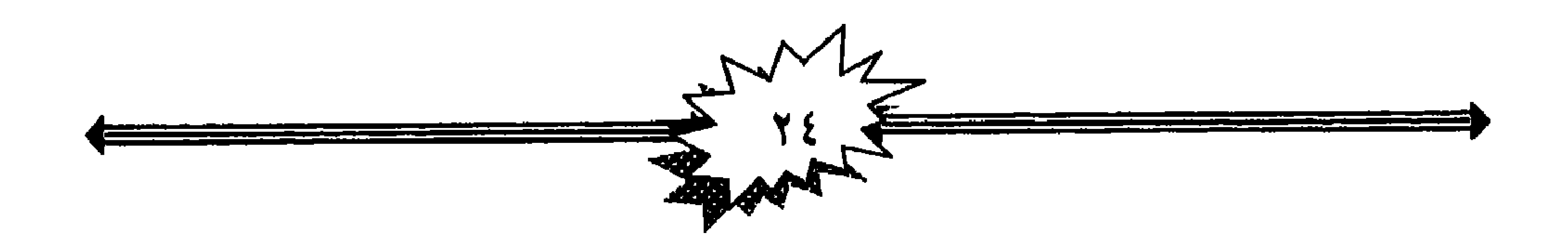
$$ف_{\theta}\left(\frac{\overline{س}}{٢}\right) = \frac{١}{٤}ف_{\theta}\,\overline{س} = \frac{١}{٤}ف_{\theta}\left(\frac{١}{ن}\sum_{ي=١}^{ن} س_{ي}\right)$$

$$= \frac{١}{٤ن^{٢}}\sum_{ي=٢}^{ن} ف_{\theta}س_{ي} = \frac{ن}{٤ن^{٢}}[\theta\,(١-\theta)] = \frac{١}{٤ن}[\theta\,(١-\theta)]$$

بمقارنة تباين المقدرين غير المتحيزين $ت_{١}$، $ت_{٣}$ نجد أن تباين $ت_{٣}$ أقل من تباين $ت_{١}$ مهما تكن $\theta \ni \theta = (١، ٠)$ وبالتالي فالمقدر $ت_{٣}$ الأفضل لتقدير θ.

إذا كان ت مقدراً غير متحيز لمعلمة θ، فإن قيمته عند عينة مشاهدة س = ($س_{١}$،...$س_{ن}$) تدعى بتقدير غير متحيز لـ θ.

كما أشرنا سابقاً ، أن المقدر غير المتحيز ت لـ$\tau(\theta)$ (كحالة خاصة $\tau(\theta) = \theta$) يعطي إلى حد ما في المتوسط تقديرات معقولة، لكن هذا لا يعني بالضرورة أن قيمة ت عن عينة مشاهدة تساوي $\tau(\theta)$ أو قريبة منها، وهذا يتعلق بدرجة تشتت ت حول $\tau(\theta)$، أي على تباينه، وبعبارة أخرى، على درجة تجانس قيم ت، وبناء على ذلك يجب عدم التمسك والمبالغة في قيمه صفة عدم التحيز (unbiased ness)، حيث يمكن أن يكون شرط عدم التحيز قاسياً في بعض الحالات ويؤدي إلى نتائج غير مرغوبة بالإضافة إلى ذلك يمكن أن تكون المقدرات غير المتحيزة لدالة معلمية $\tau(\theta)$ (ومنها $\tau(\theta) = \theta$) من أجل نموذج



مفروض غير موجود إطلاقاً، وفي حالات أخرى، وبالرغم من أنها موجودة، لكنها تطبيقاً غير مفيدة، لنوضح ذلك من خلال المثالين التاليين:

مثال (٤):

لتكن س عينة عشوائية حجمها ن = ١، مأخوذ من توزيع ل(ع)$\in \pi$ (θ)، ويطلب إيجاد المقدر غير المتحيز لـ $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

إذا كان ت(س) مقدراً غير متحيز لـ $\tau(\theta)$، فإن الشرط (٣) يكتب على النحو التالي:

$$\sum_{س=0}^{\infty} ت(س)\ \frac{\theta^{س}}{س!}\ هـ^{-\theta} = \frac{1}{\theta} \quad ; \quad \forall\ \theta \in \theta = (0,\ \infty)$$

$$أو\ \sum_{س=0}^{\infty} ت(س)\ \frac{\theta^{س+1}}{س!}\ هـ^{\theta} = \sum_{ر=0}^{\infty} \frac{\theta^{ر}}{ر!} ; \quad \forall\ \theta \in (0,\ \infty)$$

ومن الواضح أن الدالة ت (س) المحققة للشرط الأخير والمستقلة عن θ غير موجودة (شرط الاستقلال عن θ يكمن في تعريف المقدر لأنه إحصاء). أي أن المقدر غير المتحيز لـ $\tau(\theta)$ في الحالة المفروضة غير موجود.

مثال (٥): لتكن س عينة عشوائية بحجم ن = ١، مأخوذة من توزيع ل (ع) $\in$ ت (١، ٠) ويطلب إيجاد المقدر غير المتحيز لـ $\tau(\theta) = \theta$.

بتطبيق العلاقة (٢) نجد: $\sum_{س=0}^{\infty} ت(س)\ س^{\theta} = \frac{\theta}{1-\theta} = \sum_{ر=1}^{\infty} \theta^{ر}$; $\forall\ \theta \in (0،\ 1)$

وبمساواة الأمثال (المعاملات) حسب درجة θ، نلاحظ أن المقدر غير المتحيز الوحيد لـ θ في هذه الحالة يتمثل في الإحصاء:

$$ت(س) = \begin{cases} ٠ ، & س = ٠ \\ ١ ، & س \geq ١ \end{cases}$$

لكن قيمتي هذا الإحصاء لا يتميان لفضاء العينة θ = (٠، ١) للنموذج المعطى. لذا مثل هذا المقدر عملياً غير مفيد.

يبين هذان المثالان، أنه ليس بالضرورة دائماً البحث فقط عن المقدرات غير المتحيزة بل أحياناً وكما يبين المثال التالي. إن المقدر ذو التحيز الصغير ب(θ) ومتوسط مربع الخطأ صغير (تحيز صغير وتباين صغير) أفضل من مقدر غير متحيز ذو تباين كبير لتقدير دالة $\tau(\theta)$.

مثال (٦):

لتكن س = (س١،...سن) عينة من توزيع ل(ع) $\in$ ن (θ_1، θ_2^2) حيث ن $\geq$ ٢

ويطلب تقدير θ = (θ_1، θ_2^2) ; J (θ) = J (θ_1، θ_2^2) = θ_2^2.

نجد من العلاقة (١)، إذا كان $م^2$ = $م^2$(س) تباين العينة فإن $و_\theta(م^2)$ = $\frac{ن-1}{ن}\theta_2^2 \neq \theta_2^2$ أي أنه مقدر متحيز لـ$\theta_2^2 = \tau(\theta)$. وعلى ذلك فإن المقدر غير متحيز لـ$\tau(\theta) = \theta_2^2$ هو:

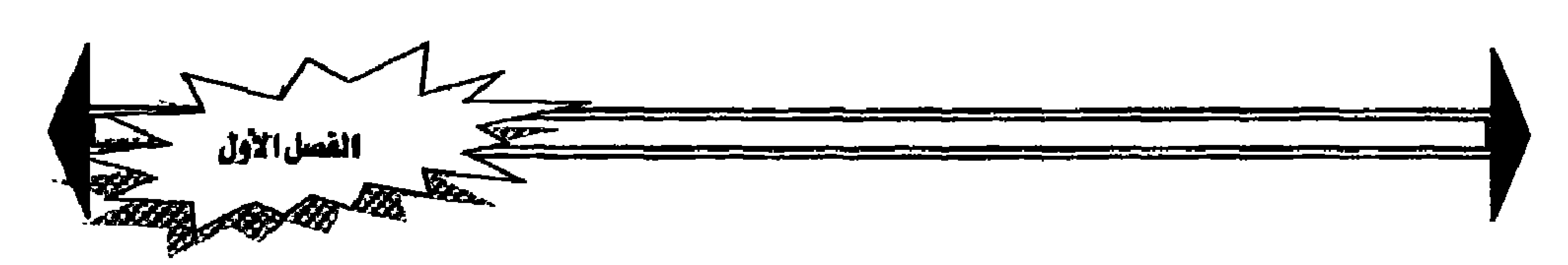
$$م^{*2} = \frac{ن}{ن-1}م^2 = \frac{1}{ن-1}\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \bar{س})^2 \text{..........................(٤)}$$

وحسب المبرهنة (٥)، نجد: $ل_\theta = (\frac{ن-1}{\sigma^2}م^{*2}) = س^2_{(ن-1)}$

وبالتالي حسب العلاقة (٣٢):

$$و_\theta(\frac{ن-1}{\theta_2^2}م^{*2}) = (ن-1) ، ف_\theta(\frac{ن-1}{\theta_2^2}م^{*2}) = 2(ن-1)$$





أو $\text{و}_\theta(\text{م}^{*2}) = \theta_2^2$ ، $\text{ف}_\theta(\text{م}^{*2}) = \frac{2}{\text{ن}-1}\theta_2^4$

سنبين فيما بعد حسب معيار أقل تباين أن المقدر م^{*2} يعتبر الأفضل ضمن كل المقدرات غير المتحيزة للدالة $\tau(\theta) = \theta_2^2$ في معلمتي النموذج ن (θ_1, θ_2^2)، أي أن تباينه المعطى بالعلاقة (٥) أصغر من تباين أي مقدر غير متحيز آخر لـ$\tau(\theta) = \theta_2^2$ وذلك مهما تكن $\theta \in \Theta$.

لنعبث الآن في عائلة المقدرات من الشكل $\text{ت}_\lambda = \lambda\, \text{م}^{*2}$، حيث λ عدد حقيقي. بما أن

$\text{و}_\theta \text{ت}_\lambda = \lambda\, \text{و}_\theta(\text{م}^{*2})$، فيوجد في هذه العائلة مقدر غير متحيز وحيد لـ$\tau(\theta) = \theta_2^2$ وهو م^{*2}، أي الموفق لـ $\lambda = 1$.

لنحسب متوسط مربع الخطأ المقدر ما $\text{ت}_\lambda \neq \text{م}^{*2}$، أي $\lambda = 1$:

$$\text{و}_\theta(\text{ت}_\lambda - \theta_2^2) = \text{و}_\theta[\lambda(\text{م}^{*2} - \theta_2^2) + (\lambda - 1)\theta_2^2]^2 =$$

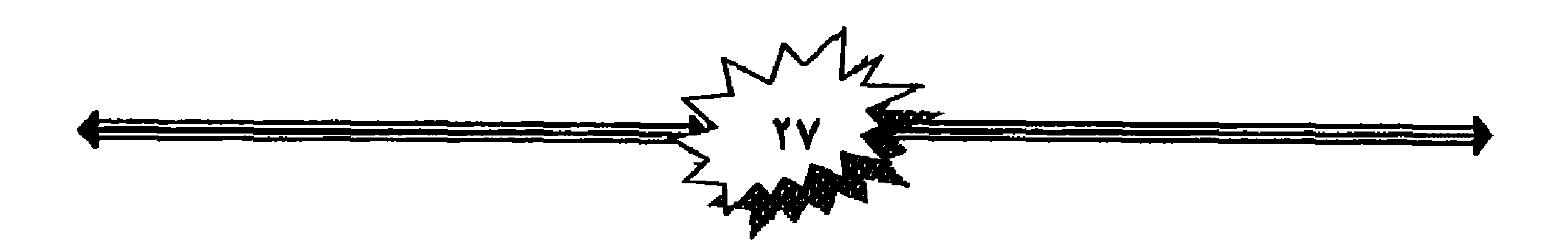
$\lambda^2 \text{ف}_\theta(\text{م}^{*2}) + (\lambda - 1)^2\theta_2^4$ تبلغ الدالة $\varphi(\lambda^*) = \frac{2}{\text{ن}+1}$. ويأخذ العلاقة (٥) بعين الاعتبار نجد:

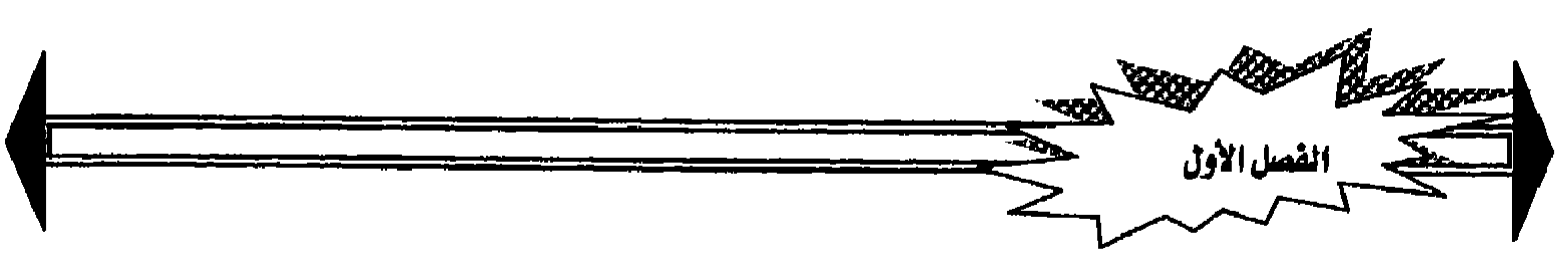
$$\text{و}_\theta(\text{ت}_{\lambda^*} - \theta_2^2)^2 = \frac{2}{\text{ن}+1}\theta_2^4 < \frac{2}{\text{ن}-1}\theta_2^4 = \text{و}_\theta(\text{م}^{*2} - \theta_2^2)^2$$

هكذا وفق معيار متوسط مربع الخطأ، عندما $\text{ن} \geq 2$، فإن المقدر المتحيز.

$$\text{ت}_\lambda = \lambda^* \text{م}^{*2} = \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}+1}\,\frac{1}{\text{ن}-1}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_\text{ي} - \bar{\text{س}})^2 = \frac{1}{\text{ن}+1}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_\text{ي} - \bar{\text{س}})^2$$

الذي انحرافه (تحيزه) $\text{ب}(\theta) = (\text{و}_\theta \text{ت}_{\lambda^*} - \theta_2^2) = -\frac{2}{\text{ن}+1}\theta_2^2$ صغير عندما يكون حجم العينة ن كبيراً بشكل كاف، ويعتبر مقدراً أفضل من المقدّر





غير المتحيز $م^{*}_{2}$ لـ $\tau(\theta) = \theta_2^2$ في المعلمة θ_2^2 للنموذج ن (θ_1، θ_2^2). وهذا يعني غالبية قيم $ت_{\lambda*}$، أقرب إلى القيمة الحقيقية لـ θ_2^2 من قيم $م^{*}_{2}$ المناظرة لها.

يبين هذا المثال، أنه لا يمكن اعتبار معيار مقارنة المقدرات وحيداً كما لا يوجد مقدّر وحيد لمعلمة مفروضة ، يلائم كل الحالات.

المقدّرات المتسقة CONSISTENT ESTIMATORS

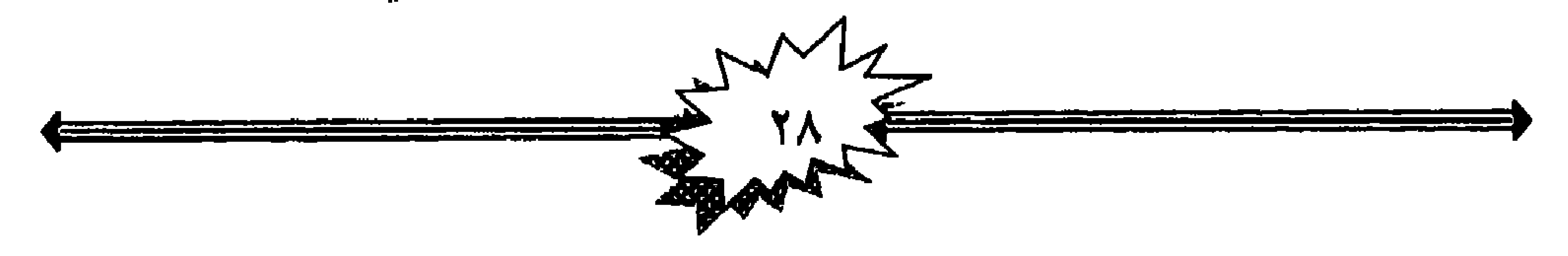
يبدو لنا بوضع من تعريف العينة العشوائية أن المقدر المبني على أساس عينة تحوي ن قياساً (أو ملاحظة) مثلاً يجب أن يكونأفضل بشكل عام، من المقدّر المبني على أساس عينة عشوائية تحوي عدداً أقل من ن. ولإيضاح الفكرة أكثر، لنفترض أن $ت_1$ مقدّر للمعلمة θ في مجتمع معطى مبني على عينة حجمها ن = ١، أي تحوي ملاحظة أو قياساً واحداً للمتحيز العشوائي الملاحظ ع، وليكن $ت_2$ مقدّراً لنفس المعلمة مبيناً على أساس عينة عشوئية حجمها ن = ٢، وبشكل عام نفترض أن $ت_ن$ هو مقدّر لـ θ مبني على أساس عينة حجمها ن، أي أن $ت_1$، $ت_2$،......، $ت_ن$،.... متتالية من المقدّرات لـ θ نرمز لها بـ $\{ت_ن\}$. تعني بالفكرة السابقة أن المتتالية $\{ت_ن\}$ تتقارب احتمالية إلى θ (أو تنتهي احتمالية إلى θ) عندما ن$\leftarrow$ ∞ ولهذا يهمنا معرفة سلوك المقدّر $ت_ن$ بازدياد حجم العينة.

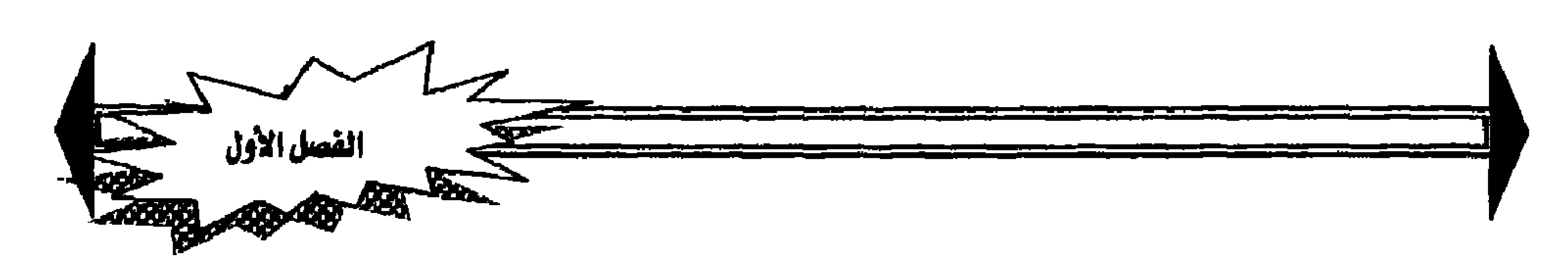
تعريف المقدّر المتسق

يقال عن مقدّر $ت_ن$ لدالة معلمية $\tau(\theta)$ أنه متسق، إذا كان من أجل مقدار ε صغير موجب:

$$\lim_{ن\to\infty} ب[\,|ت_ن - \tau(\theta)| < \varepsilon) = 1$$

وعندما $\tau(\theta) = \theta$ فالعلاقة (١) تكتب على النحو الآتي:





$$\lim_{ن \to \infty} ب\,[\,|ت_ن - \theta| < \varepsilon) = 1$$

أو $$\lim_{ن \to \infty} ب\,[\,|ت_ن - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

وهذا يعني أن الإحصاء $ت_ن$ يكون مقدراً متسقاً لـ $\tau(\theta)$ إذا اقترب من $\tau(\theta)$ بازدياد حجم العينة ن، أي أن $ت_ن$ يتقارب بالاحتمال Converges in probability من $\tau(\theta)$

مثال (1):

إذا كانت س = ($س_1$،....$س_ن$) عينة عشوائية من مجتمع يتبع التوزيع ل(ع) $\in$ ن (θ، σ^2) فهل $ت_ن = \bar{س}$ مقدر متسق للمعلمة θ؟

كما نعلم:

ل($س_ي$) $\in$ ن (θ، σ^2) ; ي = 1،.......، ن

ل($\bar{س}$) $\in$ ن (θ، $\frac{\sigma^2}{ن}$)

ومن ثم: $ل\left(\frac{\bar{س}-\theta}{\sigma/\sqrt{ن}}\right)$ = ن (0، 1)

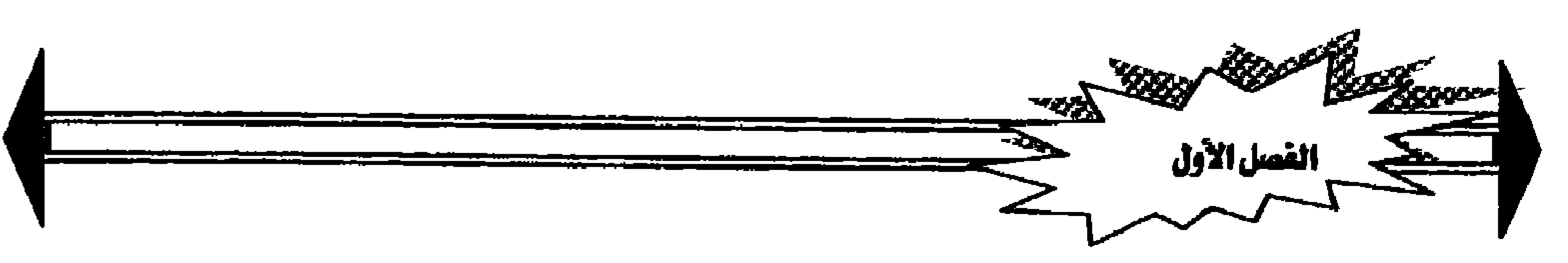
لنحسب الآن $ب_\theta$ $(|\bar{س} - \theta| < \varepsilon) = 1 - ب_\theta\,(|\bar{س} - \theta| \geq \varepsilon)$

$= 1 - ب_\theta\,(-\varepsilon \leq \bar{س} - \theta \leq \varepsilon)$

$= 1 - ب_\theta\,(-\varepsilon \frac{\sqrt{ن}}{\sigma} \leq \frac{\bar{س}-\theta}{\sigma/\sqrt{ن}} \leq$

$\varepsilon \frac{\sqrt{ن}}{\sigma}) = 2 - 2\Phi\,(\varepsilon \frac{\sqrt{ن}}{\sigma})$





حيث أن Φ(ع) دالة التوزيع الطبيعي المعياري ن (٠، ١)، وبأخذ نهاية الطرفين عندما ن ⟵ ∞ نجد:

$$\lim_{ن \to \infty} ب\left(|\bar{س} - \theta| < \varepsilon\right) = ٢ - ٢\Phi(\infty) = ٢ - ٢ = ٠$$

وحسب التعريف (١) فإن $ت_ن = \bar{س}$ مقدر متسق للمعلمة θ. وبما أن $و_\theta \bar{س} = \theta$، فإن $ت_ن = \bar{س}$ مقدر غير متحيز لـ θ. وهذا يعني أن المقدر المتسق يمكن أن يكون غير متحيز أيضاً.

إذا كان $ت_ن = ت_ن(س)$ مقدّراً متسقاً لـ$\tau(\theta)$. فأية قيمة ملاحظة لـه ت = $ت_ن$(س) تدعى بالتقدير المتسق (Consistent estimate) لـ $\tau(\theta)$.

في حالات عدة تكون المبرهنة التالية مفيدة للتأكد من أن مقدراً ما $ت_ن$ متسق لـ $\tau(\theta)$. حيث أن الطريقة للتأكد من أن إحصاء ما متسق بتطبيق العلاقة (١) تكون أحياناً عملية صعبة.

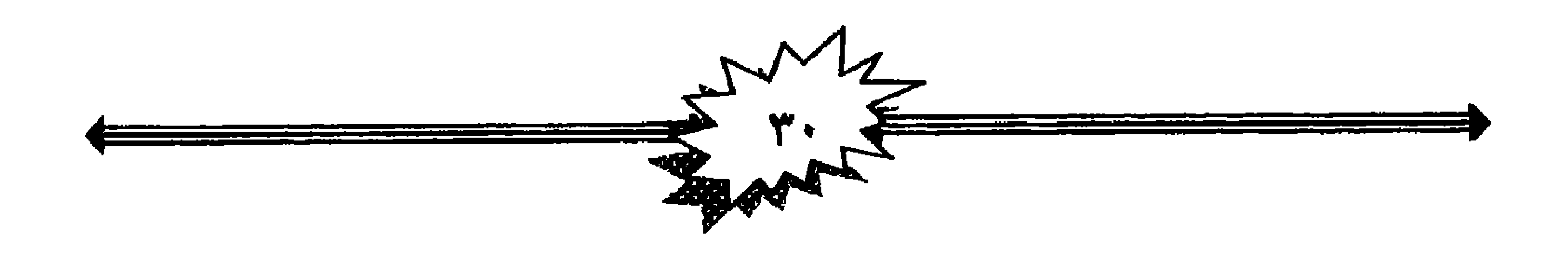
مبرهنة: إذا كان $ت_ن$ مقدّراً لـ $\tau(\theta)$ وحقق الشرط.

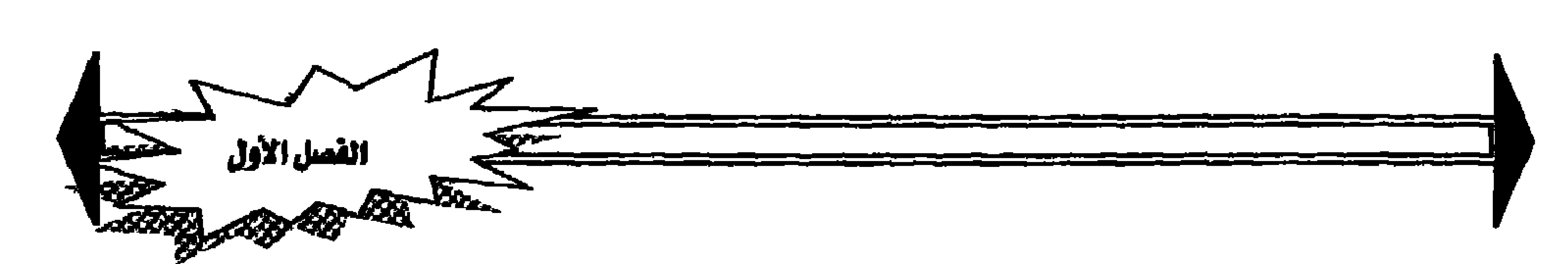
$$\lim_{ن \to \infty} و_\theta[ت_ن - \tau(\theta)]^٢ = ٠$$ فإن $ت_ن$ مقدر متسق لـ $\tau(\theta)$.

الإثبات:

إن الشرط المذكور في المبرهنة كاف وليس ضرورياً، أي إذا كان المقدر $ت_ن$ متسقاً ليس بالضرورة محققاً للشرط (٢). لكن العكس صحيح والإثبات شبيه بإثبات متباينة تشيبيشف. لنفترض للتبسيط أن $\tau(\theta) = \theta$، وعندئذ: $و_\theta$

$$(ت_ن - \theta)^٢ = \int_{-\infty}^{+\infty} (ت - \theta)^٢ \, ل(ت) \, دت =$$





$= \int_{-\infty}^{\theta-\delta}$ (ت $-\theta)^2$ ق(ت) دت+ $\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}$ (ت $-\theta)^2$ ق(ت) دت+ $\int_{\theta+\delta}^{+\infty}$ (ت $-\theta)^2$ ق(ت) دت

ولدينا في التكاملين الأول والثالث (ت $-\theta)^2 \geq \delta^2$ والتكامل الثاني غير سالب، إذن:

$و_\theta$(ت$_ن - \theta)^2 \geq \int_{-\infty}^{\theta-\delta}$ (ت $-\theta)^2$ ق(ت) دت + $\int_{\theta+\delta}^{+\infty}$ (ت $-\theta)^2$ ق(ت) دت $\geq \delta^2$ [ب$_\theta$(ت$_ن \leq \theta - \delta$) + ب$_\theta$ (ت$_ن \geq \theta - \delta$)]

$= \delta^2$ ب$_\theta$ (|ت$_ن - \theta| \geq \delta$)

وعلى ذلك نجد: ب$_\theta$ (|ت$_ن - \theta| \geq \delta$) $\leq \frac{و(ت_ن - \theta)^2}{\delta^2}$

بما أن الطرف الأيمن في هذه المتباينة ينتهي، حسب الفرض إلى الصفر عندما ن$\to \infty$ بالإضافة إلى أن الاحتمال لا يمكن أن يكون سالباً فإن: $\lim_{ن\to\infty}$ ب$_\theta$ (|ت$_\theta - \theta| \geq \delta) = 0$

أي أن ت$_ن$ مقدّر متسق لـ θ.

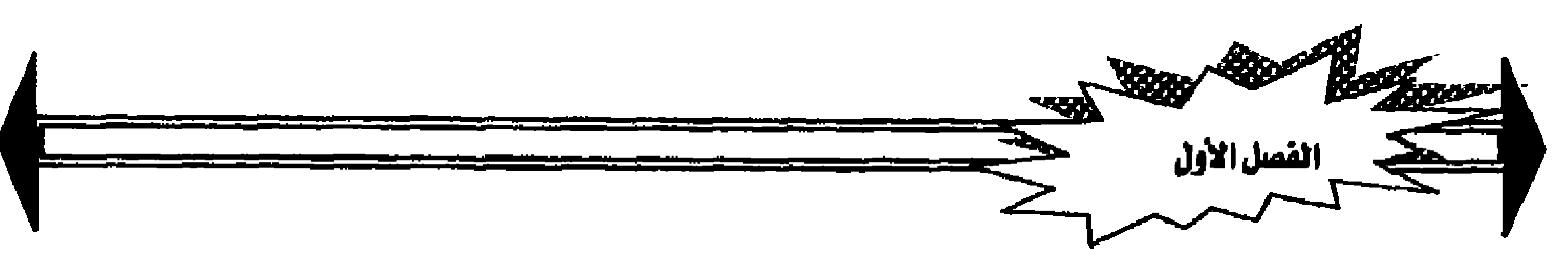
بما أن $و_\theta$(ت$_ن - \theta)^2$ = ق$_\theta$ت$_ن$ + ب$^2(\theta)$، فإن تحقق الشرط (٢) يكافئ تحقق الشرطين:

$\lim_{ن\to\infty}$ ف$_\theta$ت$_ن = 0$

$\lim_{ن\to\infty}$ ب$^2(\theta) = 0 \Leftrightarrow \lim_{ن\to\infty} و_\theta$ت$_ن = \theta$..........................(٣)

وهذا يعني أن كل مقدّر متسق غير متحيز تقريباً.





إذا كان $ت_ن$ مقدّر متحيز لـθ فإن الشرط الثاني في (٣) محقق، وبالتالي يكفي التأكد من أن تباينه ينتهي إلى الصفر عندما ن ← ∞ لكي يكون مقدّراً متسقاً. أي نقول عن مقدر غير متحيز $ت_ن$ لـθ أنه متسق أيضاً إذا كان: $\lim_{ن \to \infty}$ $ع_\theta ت_ن = ٠$.

مثال (٢): إذا كان س متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ذي الحدين ب (ن، θ)، فإن $ت_ن = \frac{س}{ن}$ مقدر متسق للمعلمة θ، حيث س عدد النجاحات في ن تكرار بيرنولي

بما أن $\mathfrak{T}$(س) $\in$ ب (ن، θ)، فإن:

$$ع(س ; \theta) = ج_{س}^{ن}\, \theta^{س} (١ - \theta)^{ن-س}،\quad س = ٠، ١، ....، ن$$

وعلى ذلك نجد: $و_\theta ت_ن = \frac{١}{ن} و_\theta س = \frac{١}{ن}\, ن\, \theta = \theta$

وبالتالي $ت_ن$ مقدّر غير متحيز للمعلمة θ، وكذلك فإن: $ع_\theta ت_ن = \frac{١}{ن^٢}$

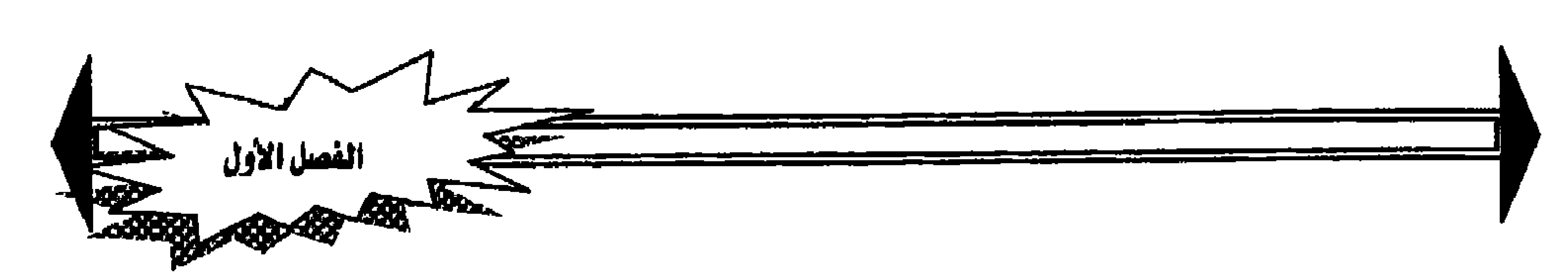
$$ع_\theta س = \frac{١}{ن^٢}\, ن\, \theta\, (١ - \theta) = \frac{\theta(١-\theta)}{ن}$$

وعلى ذلك نجد: $\lim_{ن \to \infty} ع_\theta ت_ن = ٠$

وبما أن المقدّر $ت_٢$ غير متحيز وتباينه ينتهي إلى الصفر عندما ن ← ∞، فحسب المبرهنة السابقة يكون $ت_ن$ مقدراً متسقاً للمعلمة θ.

مثال (٣): إذا كانت س = ($س_١$، ......$س_ن$) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع تبيع توزيع كوشي بالمعلمة θ، أي أن: $ع(س ; \theta) = \frac{١}{\pi\left[١+(س-\theta)^٢\right]}$،





$-\infty <$ س $< +\infty$

فإن متوسط العينة تن = $\bar{س}$ يعتبر مقدراً غير متسق للمعلمة θ.

كما نعلم أن توزيع متوسط العينة يخضع بدروه لتوزيع كوشي أي أن:

$$ق(\bar{س}\,;\,\theta) = \frac{1}{\pi\left[1+\left(\bar{س}-\theta\right)^{2}\right]} \;،\; -\infty < \bar{س} < +\infty$$

ولكي يكون تن = $\bar{س}$ مقدراً متسقاً لـ θ يجب أن يكون: $\lim_{ن \to \infty}$ ب$_\theta$ $(|\bar{س} - \theta| \leq \varepsilon)$ = ١ وبوضع ك = $\bar{س} - \theta$ نجد:

$$ب_{\theta}\,(|\bar{س} - \theta| \leq \varepsilon) = ب_{\theta}\,(|ك| \leq \varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{دك}{1+ك^{2}} = \frac{2}{\pi}\,ظا^{-1}ك\Big|_{0}^{\varepsilon}$$

بما أن هذا المقدار مستقل عن حجم العينة أي أن ب$_\theta$ $(|\bar{س} - \theta|) \leq \varepsilon)$ لا يتأثر بزيادة قيمة ن، فإن تن = $\bar{س}$ مقدر غير متسق لـ θ.

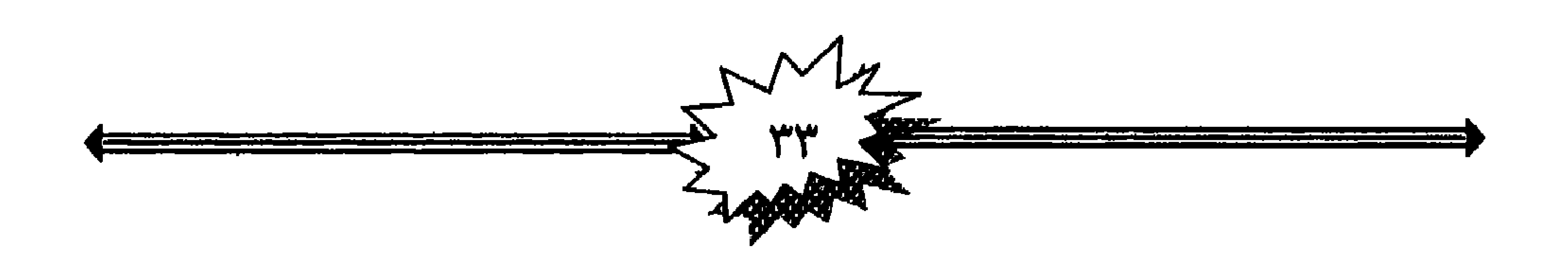
بشكل عام فإن متوسط العينة تن = $\bar{س}$ المأخوذة من مجتمع متوسطه θ وتباينه منتهي يعتبر مقدراً متسقاً لـ θ.

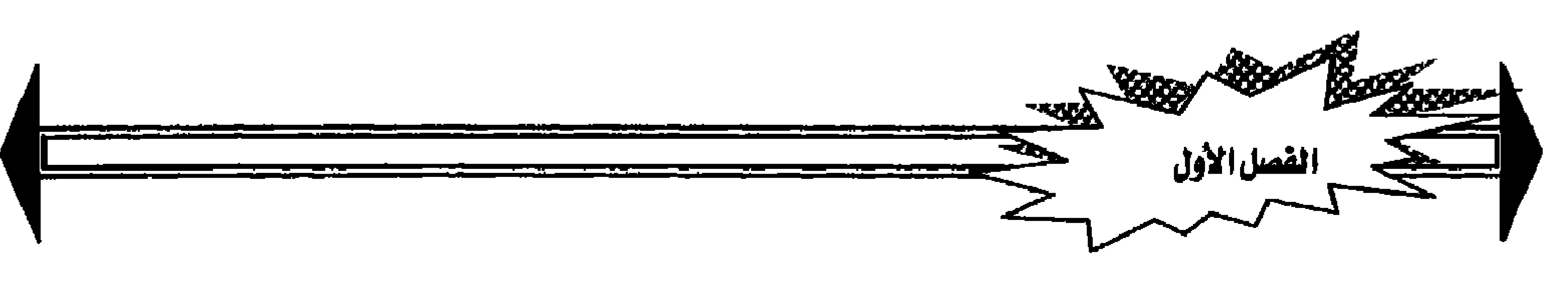
مثال (٤):

إذا كانت س = (س١،......سن) عينة عشوائية من مجتمع يتبع توزيع منتظم ر(٠، θ)، و تن = سن، فالمطلوب:

١- هل تن مقدر متسق للمعلمة θ؟

٢- هل تن مقدر غير متحيز للمعلمة θ؟





بتطبيق العلاقة (٣) نجد أن توزيع المعاينة للإحصاء ك = $س_ن$ هو: ص

$$(ك ; \theta) = \frac{ن\, ك^{ن-١}}{\theta^{ن}} ;\quad ٠ < ك < \theta$$

بما أن:

$$ب_\theta(|ك - \theta| > \varepsilon) = ب_\theta\,[(ك - \theta) < -\varepsilon] + ب_\theta\,[(ك - \theta) > \varepsilon]$$

$$= ب_\theta(ك < \theta - \varepsilon) + ب_\theta\,(ك > \theta + \varepsilon)$$

و $ب_\theta\,(ك > \theta + \varepsilon) = ٠$ لأن ك تأخذ قيمها في الفترة (٠، θ)، فإن:

$$ب_\theta\,(|ك - \theta| > \varepsilon) = ب_\theta\,(ك < \theta - \varepsilon) = \int_{٠}^{\theta-\varepsilon} \frac{ن\, ك^{ن-١}}{\theta^{ن}}\,.\, د\, ك = \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^{ن}$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما ن ⟵ ∞ نجد:

$$\underset{ن\to\infty}{نها}\, ب_\theta\,(|ك - \theta| > \varepsilon) = \underset{ن\to\infty}{نها} \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^{ن} = ٠$$

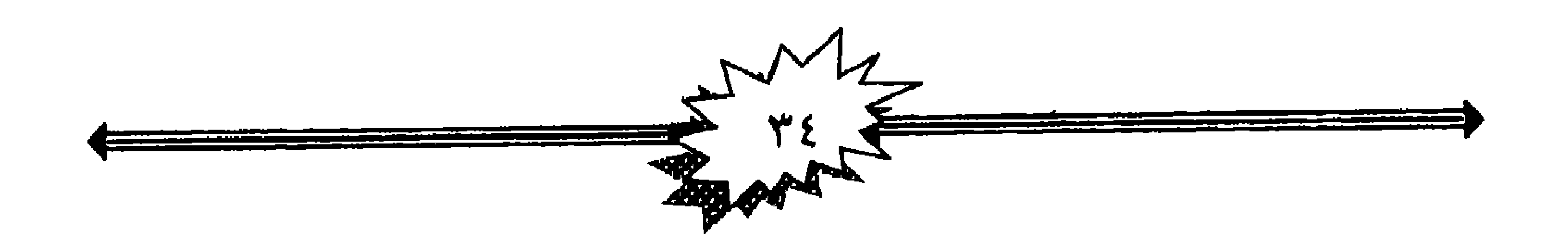
أي أن ك = $س_ن$ مقدّر متسق للمعلمة θ. وحيث أن:

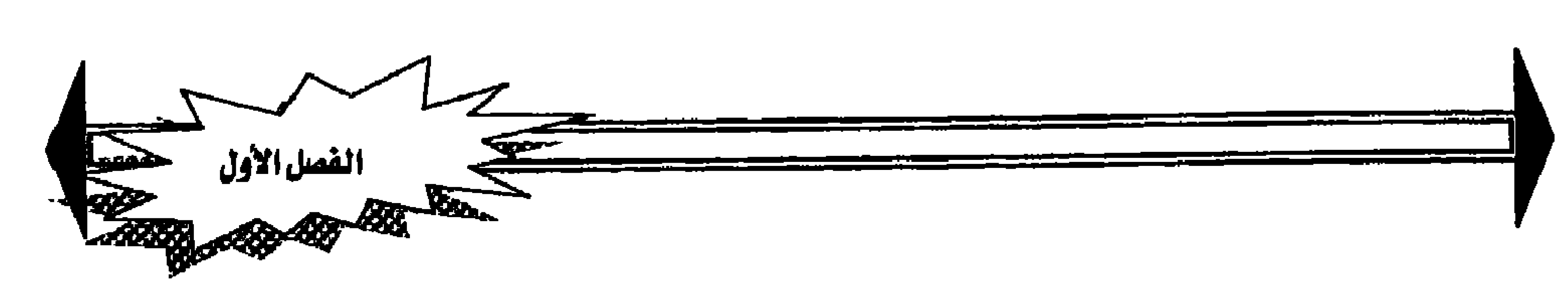
$$و_\theta ك = \frac{ن\theta}{ن+١} \neq \theta$$

فهذا يعني أن المقدّر ك = $س_{(ن)}$ متسق لكن متحيز، وبالتالي فالمقدر المتسق ليس بالضرورة غير متحيز.

مثال (٥):

إذا كانت س = ($س_١$،......، $س_ن$) عينة عشوائية من مجتمع توزيعه





$\mathfrak{I}$ (ع) $\in \tau$(١، θ)، فإن $\text{ت}_{\text{ن}}$ = $\text{س}_{(١)}$ مقدر غير متحيز للمعلمة θ، لأن:

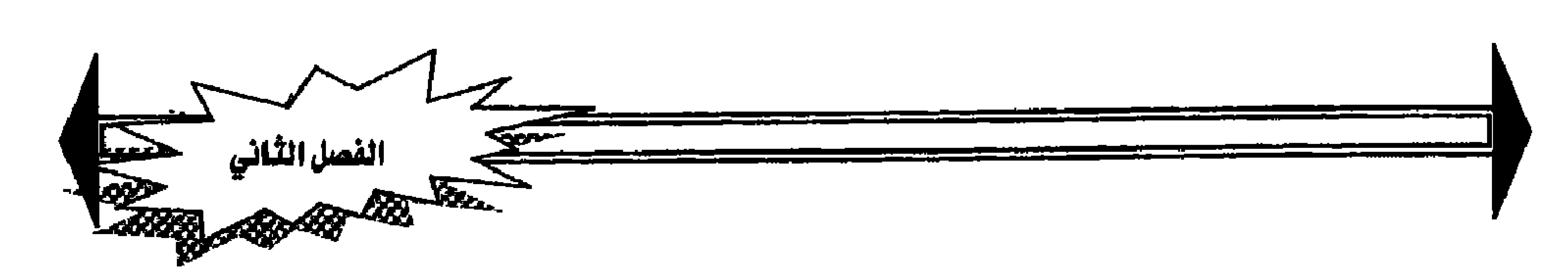
$$\text{و } \text{س}_{(١)} = \frac{١}{\theta} \int_{٠}^{\infty} \text{هـ}^{-\text{س}/\theta}\, \text{دس} = \theta \int_{٠}^{\infty} \text{هـ}^{-\text{س}/\theta}\, \text{دس} = \theta$$

إلا أنه غير متسق لأنه لا يعتمد على حجم العينة ن، أي لا يتأثر بزيادة ن، وهذا يعني أن المقدّر غير المتحيز ليس بالضرورة متسقاً.



المماس والناظم، التقّوس المنشور والنواش في المنحنيات المستوية

Statistical Point estimation



الفصل الثاني

المماس والناظم، التقوّس، المنشور والنواش في المنحنيات المستوية

١- تعطى عادة، معادلة منحن مستو على أشكال مختلفة، ففي الإحداثيات الديكارتية (س، ص) إما أن تعطى بالشكل الظاهري

ص = ق(س)

أو بالشكل الضمني:

ى(س، ص) = ٠

أو بالشكل الوسيطي

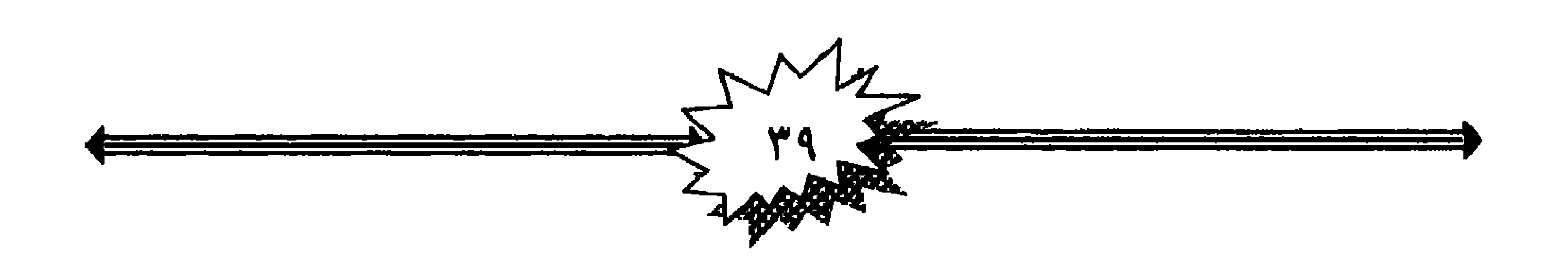
س = س(ت) ، ص = ص(ت)

وفي الإحداثيات القطبية (ر، θ) إما أن تعطى معادلة المنحنى بالشكل الظاهري:

ر = ى(θ)

أو بالشكل الضمني:

ى(ر، θ) = ٠



أو بالشكل الوسيطي:

ر = ر(ت) ، $\theta = \theta$(ت)

٢- إذا اخترنا جهة على المنحنى واعتبرناها الجهة الموجبة، ونقطة ﺃ ثابتة واعتبرناها مبدأً للأقواس على المنحنى فعندئذ يتعين وضع كل نقطة على المنحنى مثل م بفصلها المنحنى ش المقاس اعتباراً من ﺃ.

فإذا كانت النقطة م في الجهة الموجبة للمنحنى اعتباراً من ﺃ كانت ش > ٠ وإذا كانت في الجهة الثانية كانت ش < ٠.

٣- أن الشعاع الذي مركباته:

$$\alpha = \frac{\text{د س}}{\text{د ش}} \text{ ، } \beta = \frac{\text{د ص}}{\text{د ش}}$$

يعين شعاع وحدة $\overleftarrow{\text{ت}}$ على المماس للمنحنى موجهاً في الجهة الموجبة.

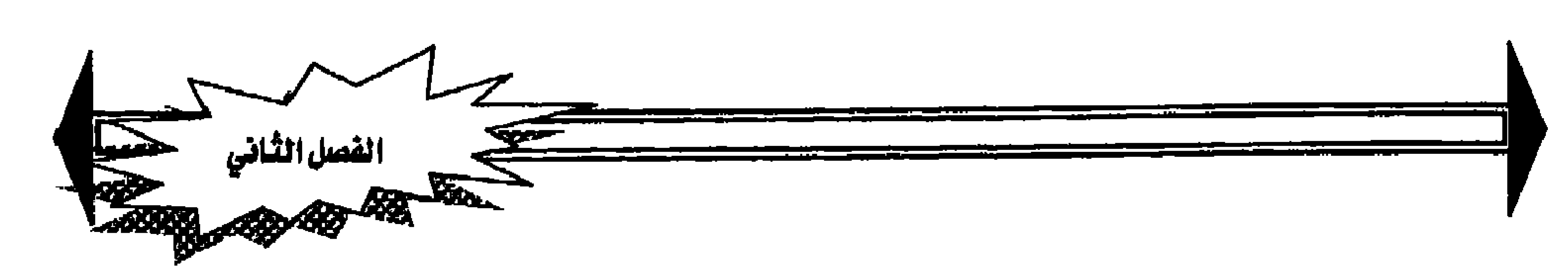
٤- نعرف شعاع الناظم الأساسي بمركباته:

$$\alpha_1 = \frac{\text{د}\,\alpha}{\text{د}\,\sigma} \text{ ، } \beta_1 = \frac{\text{د}\,\beta}{\text{د}\,\sigma}$$

حيث تمثل σ الفصل المنحني على المنحنى الذي ترسمه النقطة μ نهاية شعاع وحدة المماس المأخوذ من نقطة ثابتة، على أن نختار الجهة الموجبة على المنحنى تلك التي ترسمها النقطة μ عندما ترسم م منحنيها في الاتجاه الموجب.

٥- يعرف التقوّس أو الانحناء والذي نرمز له عادة بـ χ بالعلاقة:

$$\chi = \frac{\text{د}\,\sigma}{\text{د ش}}$$



وندعو مقلوب التقوس نصف قطر التقوس ونرمز له عادة بـ ℓ

وإذا رمزنا بـ φ للزاوية التي يضعها المماس مع محور ثابت ، "محور السينات مثلاً" فعندئذ يكون نصف قطر التقوس مساوياً إلى

$$\left|\frac{\text{د ش}}{\text{د}\varphi}\right|$$

٦- يعطى نصف قطر التقوس في الإحداثيات الديكارتية العادية بالعبارة:

$$\ell=\frac{\left[1+\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\text{د}^{2}\text{ ص}}{\text{د س}^{2}}\right|}$$

وفي الإحداثيات الوسيطية:

$$\ell=\frac{\left(\text{س}'^{2}+\text{ص}'^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\text{س}'\,\text{ص}''-\text{ص}'\,\text{س}''\right|}$$

حيث تكون الاشتقاقات الواردة في العلاقة الأخيرة بالنسبة للوسيط.

وفي الإحداثيات القطبية (ر، θ) يكون:

$$\ell=\frac{\left(\text{ر}^{2}+\text{ر}'^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\text{ر}^{2}+2\,\text{ر}'^{2}-\text{ر}\,\text{ر}''\right|}$$

وفي الإحداثيات القطبية الوسيطية يكون:

$$\ell=\frac{\left(\text{ر}^{2}\theta'^{2}+\text{ر}'^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|2\,\text{ر}'^{2}\theta'+\text{ر}\,\text{ر}'\,\theta''-\text{ر}\,\text{ر}''\,\theta'+\text{ر}^{2}\theta'^{3}\right|}$$

٧- منشور منحن هو المحل الهندسي لمركز تقوسه. ومعادلاته هي:

$$\text{س}^{١} = \text{س} + \alpha_{١}\ell \text{ ، } \text{ص}^{١} = \text{ص} + \beta_{١}\ell$$

حيث تمثل $(\text{س}^{١}, \text{ص}^{١})$ إحداثيات النقطة على المنشور و (س، ص) إحداثيات النقطة على المنحنى الأصلي. ℓ نصف قطر تقوسه و $(\alpha_{١}, \beta_{١})$ مركبات شعاع الناظم الأساسي.

تعطى كذلك معادلات المنشور على الشكل.

$$\text{س}^{١} = \text{س} - \acute{\text{ص}} \frac{\acute{\text{س}}^{٢} + \acute{\text{ص}}^{٢}}{\acute{\text{س}}\,\ddot{\text{ص}} - \acute{\text{ص}}\,\ddot{\text{س}}} \text{ ، } \text{ص}^{١} = \text{ص} + \acute{\text{س}} \frac{\acute{\text{س}}^{٢} + \acute{\text{ص}}^{٢}}{\acute{\text{س}}\,\ddot{\text{ص}} - \acute{\text{ص}}\,\ddot{\text{س}}}$$

٨- نواشر منحن هي المسارات المتعامدة على مماساته. ومعادلاتها في الإحداثيات الديكارتية هي:

$$\text{ص}^{١} = \text{ص} + (\text{ا} - \text{ش})\,\beta$$

$$\text{س}^{١} = \text{س} + (\text{ا} - \text{ش})\,\alpha$$

حيث ا عدد ثابت و (β, α) مركبات شعاع وحدة المماس.

تمارين محلولة

١- احسب نصف قطر تقوس المنحنى:

$$\text{ص} = \text{س}^{٣}$$

في النقطة (١، ١)

الحل:

نعلم أن:

$$\ell = \frac{\left(١ + \text{ص}'^{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\left|\text{ص}''\right|}$$

ولكن: $\text{ص}' = ٣\text{س}^{٢}$ ، $\text{ص}'' = ٦\text{س}$

بالتعويض نجد:

$$\ell = \frac{\left(١ + ٩\text{س}^{٤}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\left|٦\text{س}\right|}$$

وفي النقطة (١، ١) يكون:

$$\ell = \frac{\left(١ + ٩\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\left|٦\right|} = \frac{٥\sqrt{١٠}}{٣}$$

٢- احسب نصف قطر تقوس المنحنى:

$$\text{س} = \text{ت}^{٢} \text{ ، } \text{ص} = \text{ت}^{٣}$$

في النقطة (١، ١):



الحل:

نعلم أن: $\ell = \dfrac{\left(س'^{2} + ص'^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left[س' ص'' - ص' س''\right]}$

ولكن: $س' = 2ت$ و $س'' = 2$ و $ص' = 3ت^{2}$ و $ص'' = 6ت$

بالتعويض نجد:

$$\ell = \frac{\left(4ت^{2} + 9ت^{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{12ت^{2} - 6ت^{2}} = \frac{ت\left(4 + 9ت^{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{6}$$

وفي النقطة (١، ١) حيث تكون قيمة الوسيط ت = ١، نجد:

$$Q = \frac{13\sqrt{13}}{6}$$

٣- احسب نصف قطر تقوس السلسة:

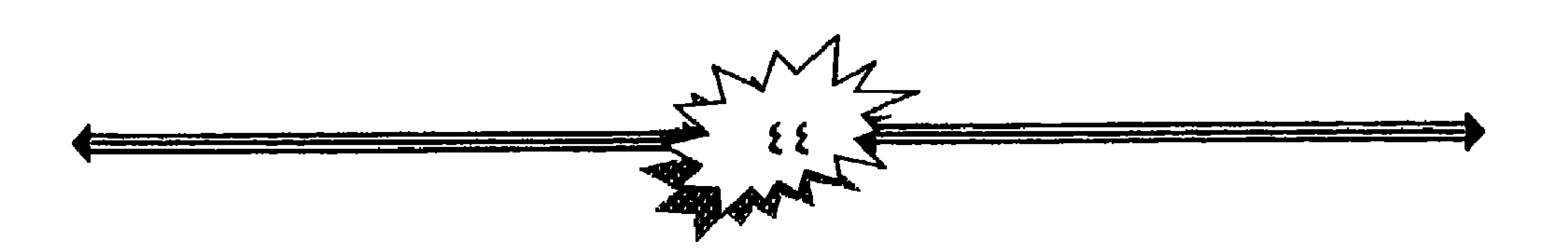
ص = م جتا (قطعي) $\frac{س}{\text{م}}$ ($\text{م} > 0$) في النقطة (م، ٠).

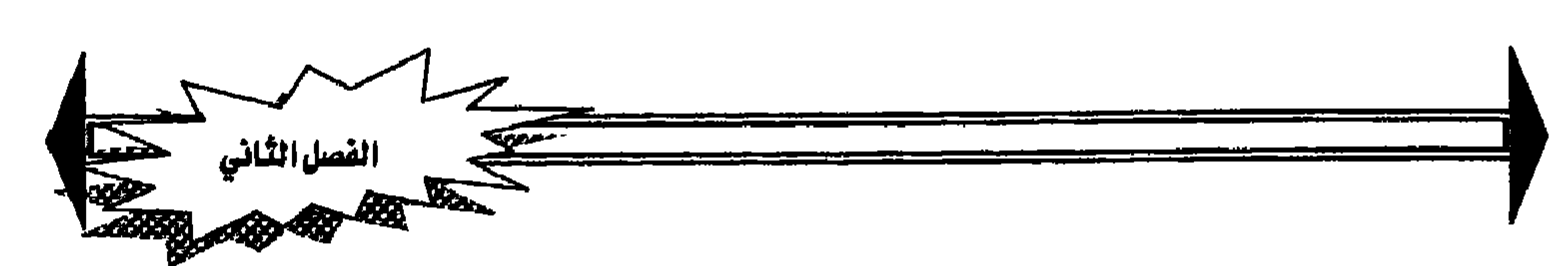
الحل: نلاحظ بسهولة أن $ص' =$ جا(قطعي) $\frac{س}{\text{م}}$ و $ص'' = \frac{1}{\text{م}}$ جتا (قطعي) $\frac{س}{\text{م}}$

ولذلك فإن:

$\dfrac{\left(1 + ص'^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|ص''\right|} = \dfrac{\left(1 + \text{جا(قطعي)}^{2}\frac{س}{\text{م}}\right)}{\left|\frac{1}{\text{م}}\text{جتا(قطعي)}\frac{س}{\text{م}}\right|}$ وبما أن جتا(قطعي) $\frac{س}{\text{م}} > 0$ مهما

كانت قيم س فإن $Q = \text{م}$. جتا(قطعي)^{2} $\frac{س}{\text{م}}$ وفي النقطة (٠، م) يكون:





Q = ٨جتا^{2}(قطعي) ٠ = ٨

٤- احسب نصف قطر تقوس المنحنى:

$$ص = ٨ \; لوجتا \frac{س}{٨}$$

الحل:

$$\text{نلاحظ: } صَ = ٨ \frac{\left(جتا \frac{س}{٨}\right)'}{جتا \frac{س}{٨}} = - ظا \frac{س}{٨}$$

$$صً = \frac{1}{٨ \; جتا^{2} \frac{س}{٨}} \quad \text{ولذلك فإن:}$$

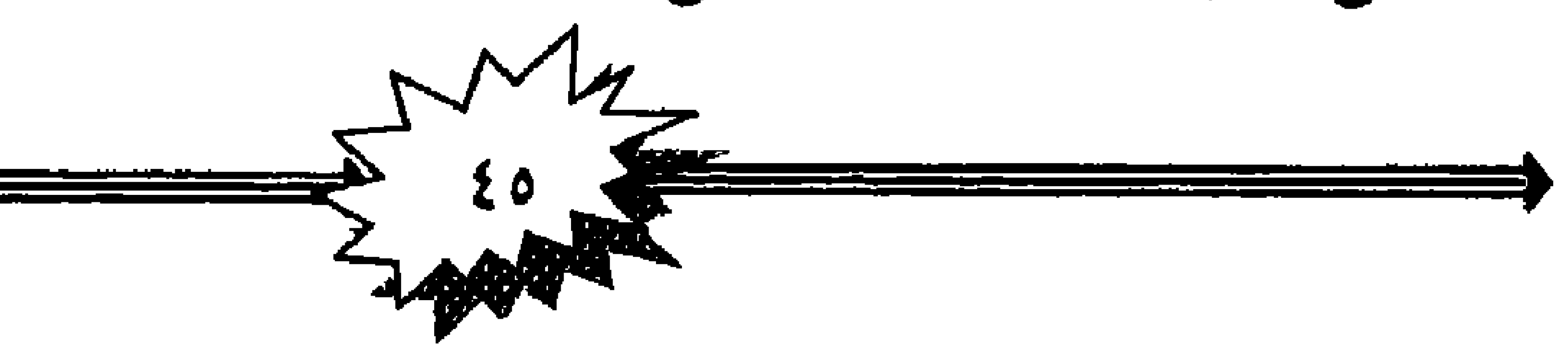
$$Q = \frac{\left(1 + صَ^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|صً\right|} = \frac{\left(1 + ظا^{2} \frac{س}{٨}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|-\frac{1}{٨ \; جتا^{2} \frac{س}{٨}}\right|} = \frac{٨}{\left|جتا \frac{س}{٨}\right|}.$$

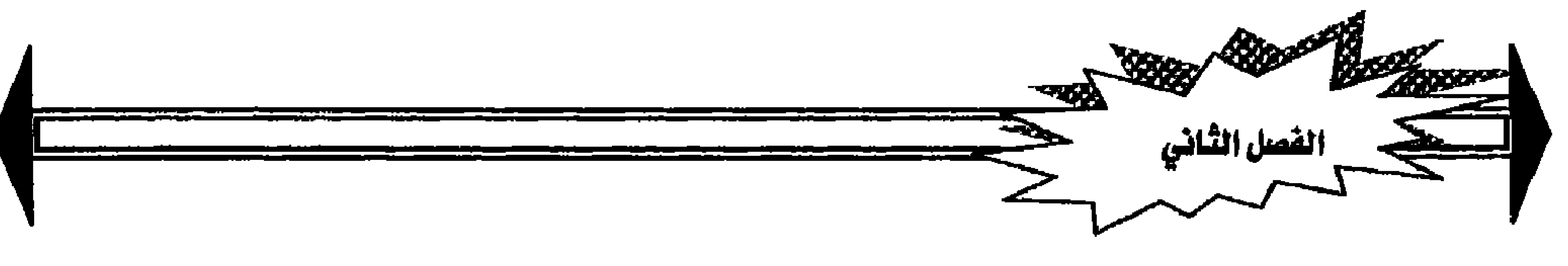
وبما أن التابع المفروض ص = ٨ لوجتا $\frac{س}{٨}$ ليس معرفاً إلا من أجل قيم س التي تجعل من جتا $\frac{س}{٨}$ موجبة و لذلك فبإمكاننا رفع إشارة القيمة المطلقة من العبارة الأخيرة فيصبح

$$Q = \frac{٨}{جتا \frac{س}{٨}}$$

٥- احسب نصف قطر تقوس المنحنى

س = ٨(ت – جات) ، ص = ٨(١ – جتا ت)





الحل:

يمكننا حساب نصف قطر التقوس مباشرة عن طريق الدستور:

$Q = \frac{\left(س'^2 + ص'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left[س' ص'' - ص' س''\right]}$ من أجـل ذلـك لنحـسب المـشتقات الأولى والثانية لكل من س، ص

بالنسبة للوسيط (ت) فنجد: $س' = ﻫ(1 - جتا ت)$ ، $ص' = ﻫ$ جات

$س'' = ﻫ$ جات ، $ص'' = ﻫ$ جتات

ومنه:

$س'^2 + ص'^2 = ﻫ^2(1 - جتات)^2 + ﻫ^2جا^2ت = 2ﻫ^2(1 - جتات) = 4ﻫ^2جا^2\frac{ت}{2}$

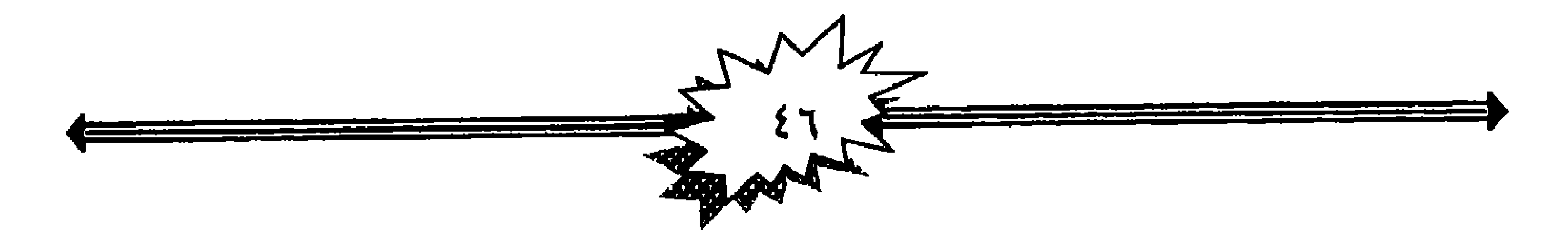
$س' ص'' - ص' س'' = ﻫ^2جتات(1 - جتات) - ﻫ^2جا^2ت = ﻫ^2جتات - ﻫ^2$

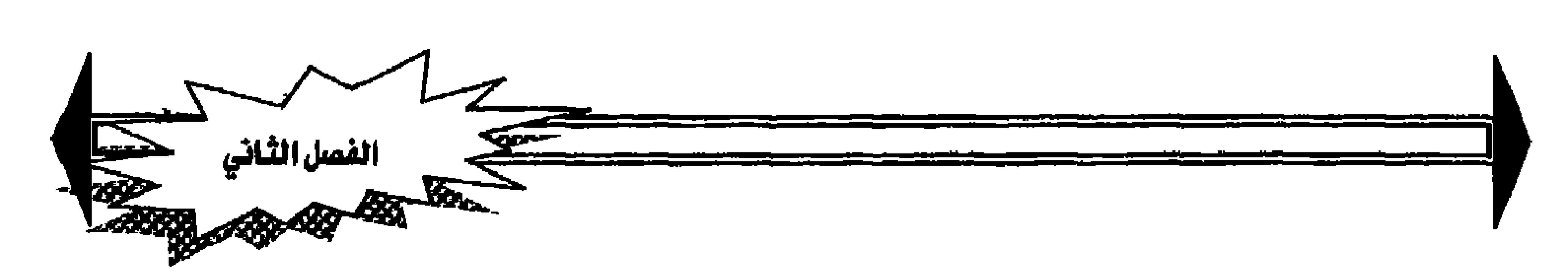
$= ﻫ^2(جتا ت - 1) = -2ﻫ^2جا^2\frac{ت}{2}$

وبالتعويض نجد:

$$Q = \frac{\left|2ﻫجا\frac{ت}{2}\right|^3}{2ﻫ^2جا^2\frac{ت}{2}} = 4ﻫ\left|جا\frac{ت}{2}\right|$$

يمكن حساب نصف قطر التقوس بشكل آخر وذلك اعتماداً على الدستور: $Q = \left|\frac{دش}{د\varphi}\right|$





حيث φ زاوية المماس مع محور ثابت "وليكن محور السينات". من أجل ذلك نلاحظ:

$$\left(\frac{دش}{دت}\right)^{٢} = \left(\frac{دس}{دت}\right)^{٢} + \left(\frac{دص}{دت}\right)^{٢} = ٤ \, ا^{٢} جا^{٢} \frac{ت}{٢}$$

$$ظا \varphi = \frac{دص}{دس} = \frac{صَ}{سَ} = \frac{اجات}{ا(١ - جتات)} = ظتا \frac{ت}{٢} = ظتا \left(\frac{\pi}{٢} - \frac{ت}{٢}\right)$$

$$ومنه \ \varphi = \frac{\pi}{٢} - \frac{ت}{٢} + ك\pi$$

حيث ك عدد صحيح. وعلى هذا: $د \varphi = -\frac{١}{٢} ت$

ويكون أخيراً:

$$\varphi = \left|\frac{د ش}{د \varphi}\right| = \left|\frac{د شَ}{\varphi}\right| = \frac{\left|٢ ا جا \frac{ت}{٢}\right|}{\frac{١}{٢}} = ٤ \, ا \left|جا \frac{ت}{٢}\right|$$

٦- احسب نصف قطر تقوس المنحنى: $ر = ا \, (١ + جتا \theta)$

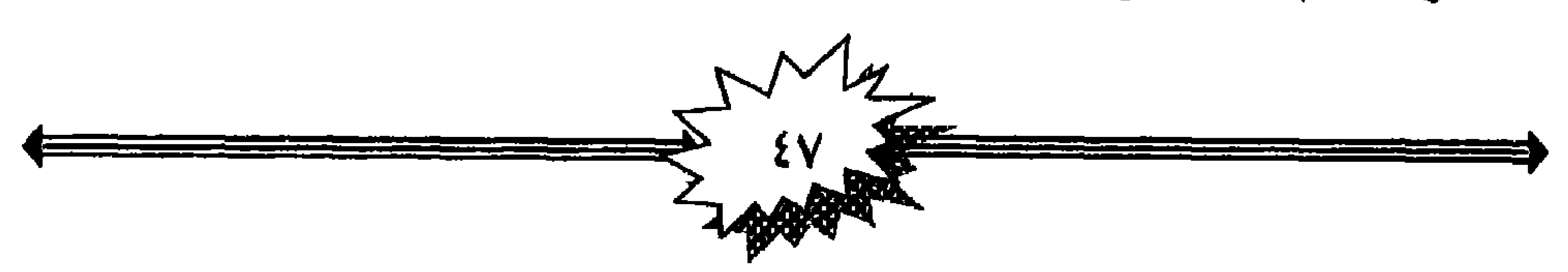
الحل:

يمكن حساب نصف قطر التقوس مباشرة عن طريق الدستور

$$Q = \frac{\left(ر^{٢} + رَ^{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\left|ر^{٢} + ٢رَ^{٢} - ر رً\right|}$$

نلاحظ من أجل ذلك:

$رَ = - ا جا\theta$ ، $رً = - ا جتا\theta$



$$\text{ر}^{٢} + \text{ر}'^{٢} = \text{أ}^{٢}\text{جا}^{٢}\theta + \text{أ}^{٢}(١ + \text{جتا}\theta)^{٢} = ٤\text{أ}^{٢}\text{جتا}^{٢}\frac{\theta}{٢}$$

$$\text{ر}^{٢} + ٢\text{ر}'^{٢} - \text{رر}'' = \text{أ}^{٢}(١ + \text{جتا}\theta)^{٢} + ٢\text{أ}^{٢}\text{جا}^{٢}\theta + \text{أ}^{٢}\text{جتا}\theta\text{س} \,.\, (١ + \text{جتا}\theta)$$

$$= ٣\text{أ}^{٢}(١ + \text{جتا}\theta) = ٦\text{أ}^{٢}\text{جتا}^{٢}\frac{\theta}{٢}$$

وبالتعويض نجد:

$$Q = \frac{\left(٤\text{أ}^{٢}\ \text{جتا}^{٢}\frac{\theta}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{٦\text{أ}^{٢}\ \text{جتا}^{٢}\frac{\theta}{٢}} = \frac{٤}{٣}\text{أ}\left|\text{جتا}\frac{\theta}{٢}\right|$$

هذا ويمكن حساب نصف قطر التقوس بشكل آخر. نلاحظ من أجل ذلك أن الزاوية التي يصنعها المماس م مع محور السينات ولتكن ∞ تساوي الزاوية التي يصنعها المماس مع نصف القطر الشعاعي ولتكن ل مضافاً إليها الزاوية القطبية θ، إذن: $\varphi = \theta + \text{ل}$

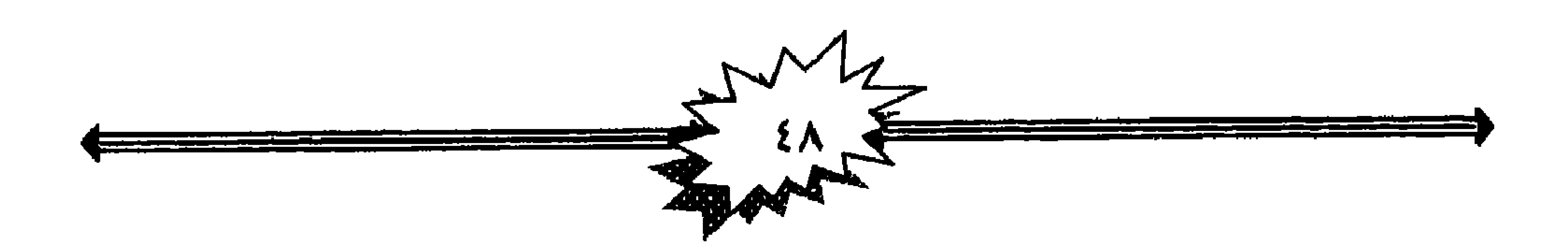
ولكن

$$\text{ظا ل} = \frac{\text{ر}}{\text{ر}'} = \frac{\text{أ}(١ + \text{جتا}\theta)}{-\text{أجا}\theta} = \frac{\text{جتا}\frac{\theta}{٢}}{\text{جا}\frac{\theta}{٢}} = -\ \text{ظتا}\frac{\theta}{٢} = \text{ظا}\left(\frac{\theta}{٢} + \frac{\pi}{٢}\right)$$

ويكون: $\text{ل} = \frac{\theta}{٢} + \frac{\pi}{٢} + \text{ك}\pi$

ويكون بالتالي:

$\varphi = \theta + \frac{\theta}{٢} + \frac{\pi}{٢} + \text{ك}\pi$ ومنه $\text{د}\varphi = \frac{٣}{٢}\text{د}\theta$.



وبما أن $\left(\frac{دش}{د\theta}\right)^{٢} = (ر^{٢} + ر'^{٢})$ إذن: $\left|\frac{دش}{د\varphi}\right| = ٢ ا \left|جتا \frac{\theta}{٢}\right|$

ويكون أخيراً: $Q \left|\frac{دش}{د\varphi}\right| = \frac{٤}{٣} ا \left|جتا \frac{\theta}{٢}\right|$

٧- احسب نصف قطر تقوس المنحنى:

$ر = ١ + ظا^{٢}ت$ ، $\theta = ٢ ت - ظا ت$

الحل: نلاحظ بسهولة أن:

$ر' = ٢ظات (١+ظا^{٢}ت)$، $\theta' = ٢-(١+ظا^{٢}ت) = ١-ظا^{٢}ت$

فإذا رمزنا بـ ل للزاوية المحصورة بين نصف القطر الشعاعي والمماس للمنحنى في النقطة م فعندئذ يكون:

$$ل = \frac{ر\theta'}{ر'} = \frac{(١+ظا^{٢}ت)(١-ظا^{٢}ت)}{٢ظا ت(١+ظا^{٢}ت)} = \frac{١-ظا^{٢}ت}{٢ظا ت} = \frac{١}{ظا٢ت}$$

ومنه نجد:

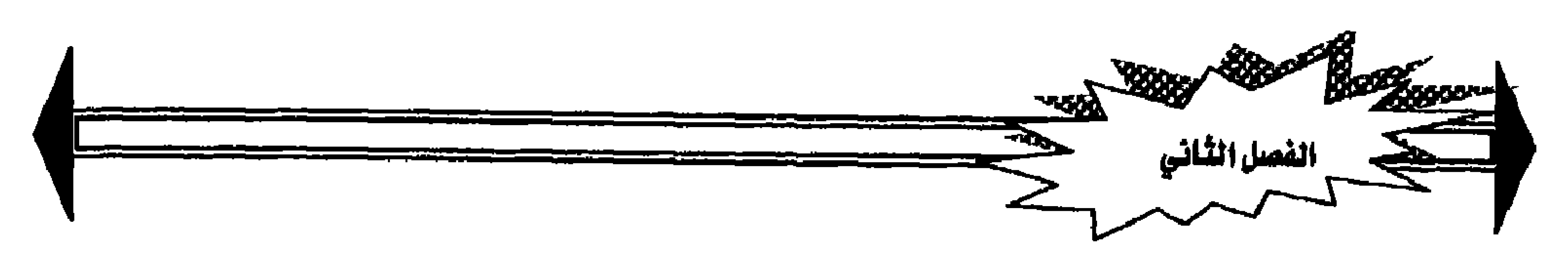
$$ظا ل = ظا\left(\frac{\pi}{٢} - ٢ت\right)$$

وبذلك نرى: $ل = \frac{\pi}{٢} - ٢ت - ك\pi$

ويكون $\varphi = ل + \theta = \frac{\pi}{٢} - ٢ت + ك\pi + ٢ت - ظا ت$

$$= \frac{\pi}{٢} + ك\pi - ظا ت$$





ويكون بالتالي:

$$د\varphi = -(١+ظا^{٢}ت)\ دت$$

وبما أن:

$$\left(\frac{دش}{دت}\right)^{٢} = \left(\frac{در}{دت}\right)^{٢} + ر^{٢}\left(\frac{د\theta}{دت}\right)^{٢} = ٤ظا^{٢}ت(١+ظا^{٢}ت)^{٤} + (١+ظا^{٢}ت)^{٢}(١-ظا^{٢}ت)^{٢}$$

وهكذا نجد: $Q = \left|\frac{دش}{د\varphi}\right| = \frac{(١+ظا^{٢}ت)^{٢}}{١+ظا^{٢}ت} = \frac{١}{جتا^{٢}ت}$

وهكذا ومن الممكن تطبيق الدستور:

$$Q = \frac{\left(ر^{٢}\acute{\theta}^{٢} + \acute{ر}^{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\left|٢\acute{ر}^{٢}\acute{\theta} + ر\acute{ر}\acute{\theta} - ر\ddot{ر}\acute{\theta} + ر^{٢}\acute{\theta}^{٣}\right|}$$

من أجل ذلك نحسب المشتقات الثانية لكل θ و ر بالنسبة للوسيط ت فنجد:

$$\ddot{ر} = ٢(١+٣ظا^{٢}ت)(١+ظا^{٢}ت)،\quad \ddot{\theta} = -٢ظات(١+ظا^{٢}ت)$$

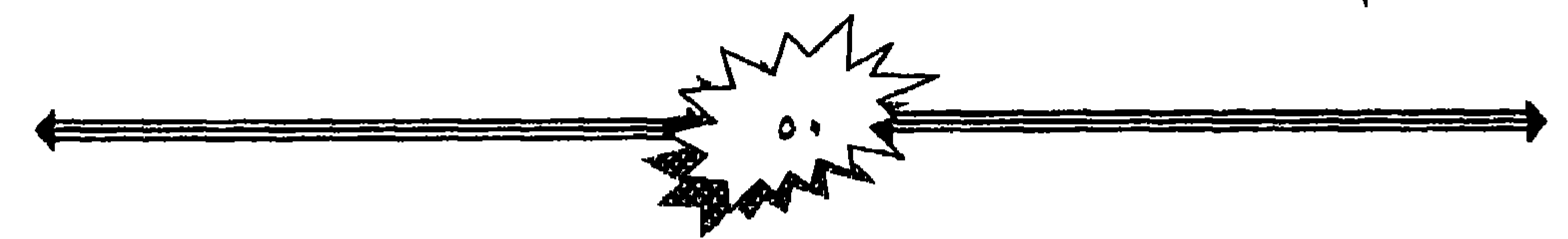
بالتعويض في الدستور نجد النتيجة السابقة نفسها.

٨- احسب إحداثيات مركز تقوس المنحنى واستنتج من ذلك معادلة المنشور:

$$س = -أ\left(لوظا\frac{ت}{٢} + جتات\right)،\quad ص = أجات$$

الحل:

نعلم أن إحداثيات مركز التقوس تعطى بالدستورين.



$$\text{س}^{(1)}=\text{س}-\text{ص}'\frac{\text{س}'^{2}+\text{ص}'^{2}}{\text{س}'\,\text{ص}''-\text{ص}'\,\text{س}''}\ ،\ \text{ص}^{(1)}=\text{ص}+\text{س}'\frac{\text{س}'^{2}+\text{ص}'^{2}}{\text{س}'\,\text{ص}''-\text{ص}'\,\text{س}''}$$

ولذلك نحسب المشتقات منه المرتبة الأولى والثانية لكن من س و ص بالنسبة دت فنجد:

$$\text{س}'=-\text{م}\left[\frac{\left(\text{ظا}\frac{\text{ت}}{2}\right)'}{\text{ظا}\frac{\text{ت}}{2}}-\text{جات}\right]=-\text{م}\left(\frac{1}{\text{جات}}-\text{جات}\right)$$

$$\text{س}'=-\frac{\text{م جتا}^{2}\text{ت}}{\text{جات}}\ ،\ \text{ص}'=\text{م جتات}$$

$$\text{س}''=-\frac{\text{م جتا}^{2}\text{ت}(1+\text{جا}^{2}\text{ت})}{\text{جا}^{2}\text{ت}}\ ،\ \text{ص}''=-\text{م جات}$$

ويكون $\text{س}'^{2}+\text{ص}'^{2}=\frac{\text{م}^{2}\text{ جتا}^{2}\text{ت}}{\text{جا}^{2}\text{ت}}$ ، $\text{س}'\,\text{ص}''-\text{ص}'\,\text{س}''=-\frac{\text{م}^{2}\text{ جتا}^{2}\text{ت}}{\text{جا}^{2}\text{ت}}$

بالتعويض نجد إحداثيات مركز التقوس:

$$\text{س}^{(1)}=-\text{م لوظا}\frac{\text{ت}}{2}\ ،\ \text{ص}^{(1)}=\frac{\text{م}}{\text{جات}}$$

إن هذه المعادلات تمثل معادلات المنشور الوسيطية لحصول على المعادلة الديكارتيه نلاحظ من المعادلة الأولى:

$$\text{ظا}\frac{\text{ت}}{2}=\text{هـ}^{-\frac{\text{س}}{\text{م}}}$$

لنعوض جات في المعادلة الثانية بما يسديها بدلالة ظل نصف الزاوية فنجد:

$\text{ص}^{(1)} = \dfrac{\text{أ}\left(1+\text{ظا}^{2}\dfrac{\text{ت}}{2}\right)}{2\text{ظا}\dfrac{\text{ت}}{2}} = \dfrac{\text{أ}(1+\text{هـ})^{\frac{2\text{س}}{\text{أ}}}}{2\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{أ}}}}$ لنضرب الصورة والمخرج بـ $\text{هـ}^{-\frac{\text{س}}{\text{أ}}}$

فنجد. $\text{ص}^{(1)} = \text{أ}\dfrac{\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{أ}}}+\text{هـ}^{-\frac{\text{س}}{\text{أ}}}}{2} = \text{أجتا(قطعي)}\dfrac{\text{س}}{\text{أ}}$

وهذا يعني أن منشور المنحنى الفروض الذي يدعى بالتراكتريس، هو عبارة عن سلسيلة.

٩- أوجد منشور المنحنى: س= أ(جتات + ت جات)، ص= أ(جات – ت جتات)

الحل:

لنحسب المشتقات الأولى والثانية لـ س و ص بدلالة الوسيط ت فنجد:

$\text{س}' = \text{أت جتات}$ ، $\text{ص}' = \text{أت جات}$

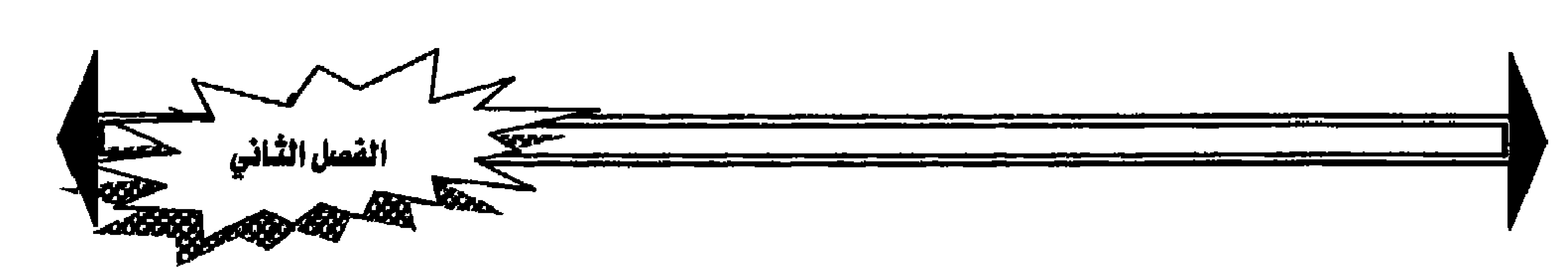
$\text{س}'' = \text{أ(جتات – ت جات)}$ ، $\text{ص}'' = \text{أ(جات + ت جتات)}$

ويكون:

$\text{س}'^{2} + \text{ص}'^{2} = \text{أ}^{2}\text{ت}^{2}$ ، $\text{س}'\text{ص}'' - \text{ص}'\text{س}'' = \text{أ}^{2}\text{ت}^{2}$

بالتعويض في دساتير المنشور نجد:

$\text{س}^{(1)} = \text{س} - \text{ص}'\dfrac{\text{س}'^{2}+\text{ص}'^{2}}{\text{س}'\text{ص}'' - \text{ص}'\text{س}''} = \text{أ(جتا + ت جات)} - \text{أت جات} = \text{أجتات}$



$ص^{(1)} = ص + \frac{سَ س^2 + صَ^2}{سَ صً - صَ سً} = ﺃ(جا ت + ت جتات) + ﺃت جتات =$ ﺃجات

وبحذف الوسيط نجد: $(س^{(1)})^2 + (ص^{(1)})^2 = ﺃ^2$

فمنشور المنحنى المفروض هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي أ.

١٠- أوجد منشور المنحنى: $س ص = ﺃ^2$

الحل:

لنمثل المنحنى المفروض وسيطياً. أن هذا الأمر يتم على أشكال مختلفة منها: إذا فرضنا:

$س = ﺃت$

فعندئذ يكون: $ص = \frac{ﺃ}{ت}$ وبذلك نكون حصلنا على التمثيل الوسيطي.

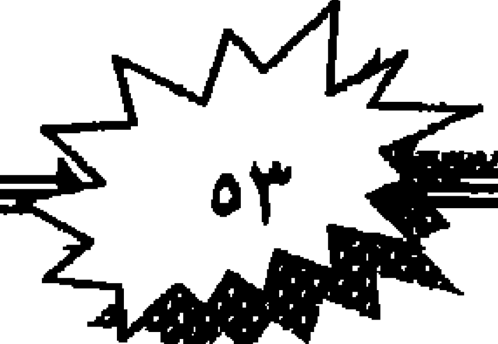
$س = ﺃت \quad ، \quad ص = \frac{ﺃ}{ت}$

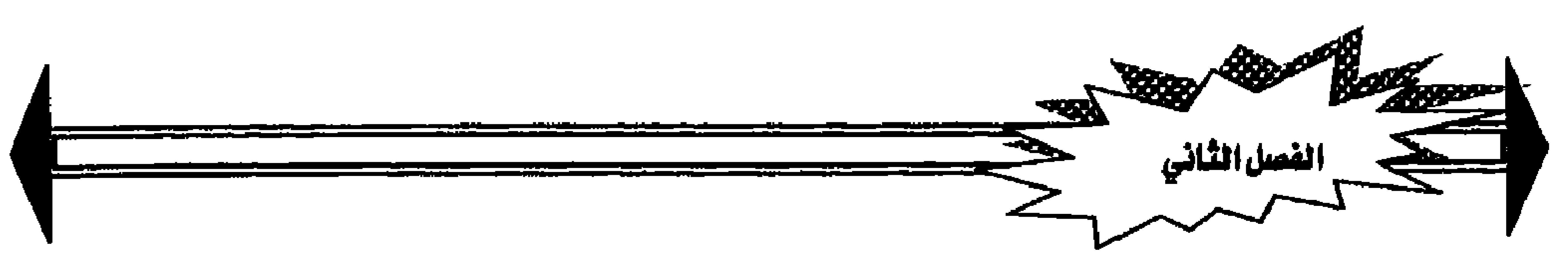
بالاشتقاق نحصل:

$سَ = ﺃ \quad ، \quad صَ = -\frac{ﺃ}{ت^2}$

$سً = ٠ \quad ، \quad صً = \frac{٢ﺃ}{ت^3}$

$سَ^2 + صَ^2 = \frac{ﺃ^2}{ت^4}(ت^4 + 1) \quad ، \quad سَ صً - صَ سً = \frac{٢ﺃ^2}{ت^3}$





ويكون بالتالي إذا عوضنا في معادلات المنشور الوسيطية:

$$س^{(1)} = أت + \frac{أ}{ت^{2}} \cdot \frac{ت^{4}+1}{2ت} = \frac{3أت}{2} + \frac{أ}{2ت^{3}}$$

$$ص^{(1)} = \frac{أ}{ت} + \frac{أت^{4}+1}{2ت} = \frac{3أ}{2ت} + \frac{أت^{3}}{2}$$

وهاتان المعادلتان الوسيطتان للمنشور المطلوب. من أجل الحصول على المعادلة الديكارتيه نحذف الوسيط ت . إن هذا الأمر يتم على الشكل الآتي: بسهولة نلاحظ:

$$ص^{(1)} + س^{(1)} = \frac{أ}{2}\left[ت^{3} + 3ت + \frac{3}{ت} + \frac{1}{ت^{3}}\right] = \frac{أ}{2}\left(ت + \frac{1}{ت}\right)^{3}$$

$$ص^{(1)} = س^{(1)} = \frac{أ}{2}\left[ت^{3} - 3ت + \frac{3}{ت} - \frac{1}{ت^{3}}\right] = \frac{أ}{2}\left(ت - \frac{1}{ت}\right)^{3}$$

وبذلك نجد: $\left(ص^{(1)} + س^{(1)}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(ص^{(1)} - س^{(1)}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16أ^{2}}$

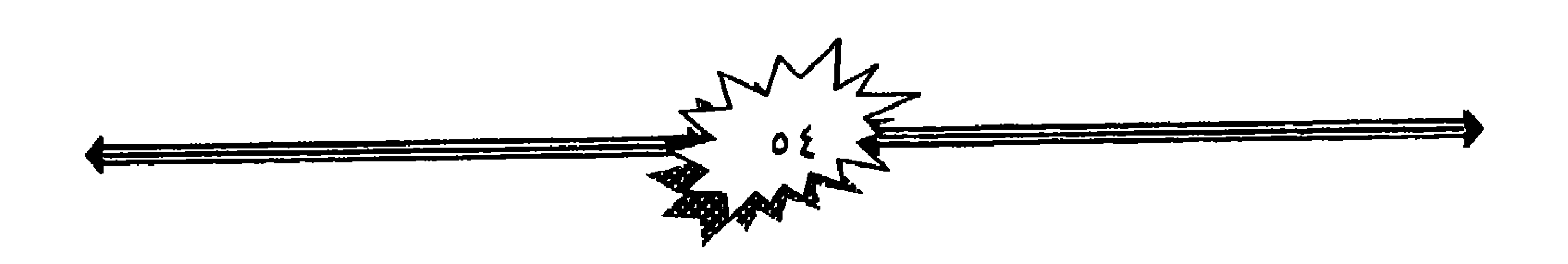
١١- برهن ن منشور الحلزون اللوغارتمي: $س = هـ^{أθ}$ هو كذلك حلزون لوغارتمي:

الحل:

يمكن تمثيل المنحنى المفروض وسيطياً على النحو الآتي:

$س = ر جتا θ = هـ^{أθ} جتا θ$

$ص = رجا θ = هـ^{أθ} جا θ$



لنحسب المشتقات الأولى والثانية لـ ص، س، بالنسبة للوسيط θ على التوالي:

سَ = أ هـ$^{\text{أ}\theta}$ جتا θ − هـ$^{\text{أ}\theta}$ جا θ

= أس − ص

صَ = أ هـ$^{\text{أ}\theta}$ جا θ + هـ$^{\text{أ}\theta}$ جتا θ = أص + س

سً = أسَ − صَ = (أ^{٢} − ١)س − ٢أص

صً = أصَ − سَ^{٢} = ٢أس + (أ^{٢} − ١) ص

يكون:

سَ^{٢} + صَ^{٢} = (أ^{٢}+١) (س^{٢}+ص^{٢})

سَ صً − صَ سً = (أ^{٢}+١) (س^{٢}+ص^{٢}

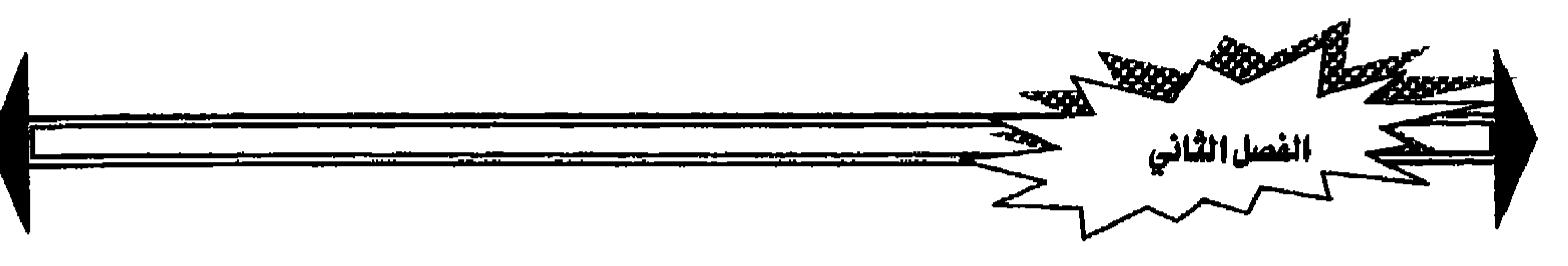
بالتعويض في معادلة المنشور نجد:

س$^{(١)}$ = س − (أص+س) = − أص = − أهـ$^{\text{أ}\theta}$ جا θ

ص$^{(١)}$ = ص + (أس − ص) = أس = أهـ$^{\text{أ}\theta}$ جتا θ

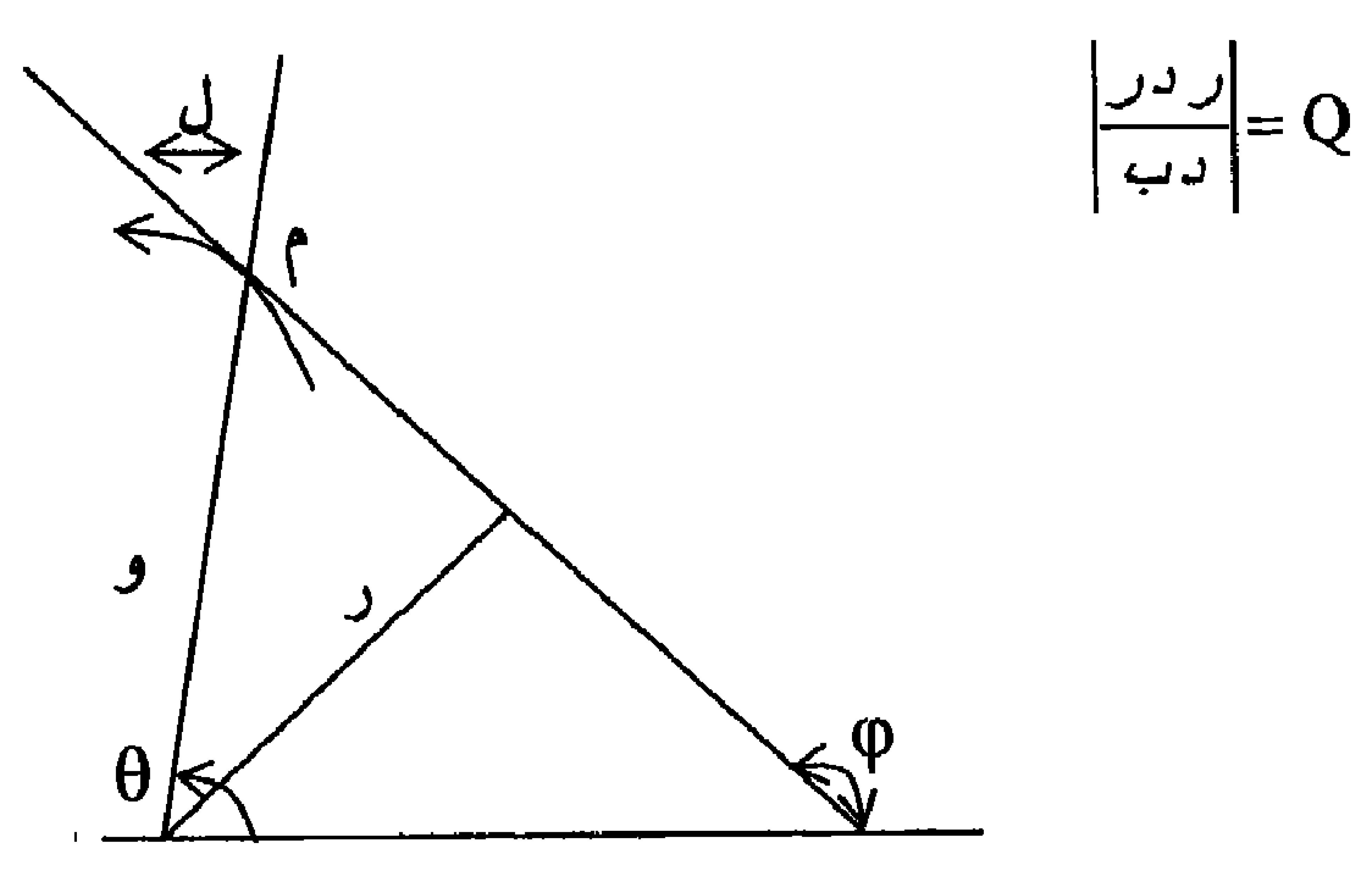
وتكون المعادلة القطبية للمنشور:

ر = أهـ$^{\text{أ}\left(\varphi+\frac{\pi}{٢}\right)}$ حيث $\varphi = \theta + \frac{\pi}{٢}$ الزاوية القطبية للمنشور.



١٢- برهن أن إذا رمزنا بـ (ر) لقياس نصف القطر الشعاعي من القطـب (و) و بـ (ب) لقياس العمود النازل من القطب إلى المماس فـإن نـصف قطـر التقوس Q يعطي بالعلاقة:

$$Q = \left|\frac{ر\,د ر}{د ب}\right|$$



الحل: من الشكل نلاحظ: ب = ر جا ل. حيث ل تمثل الزاوية بين نصف القطر الشعاعي والمماس وبتفاضل العلاقة الأخيرة نجد:

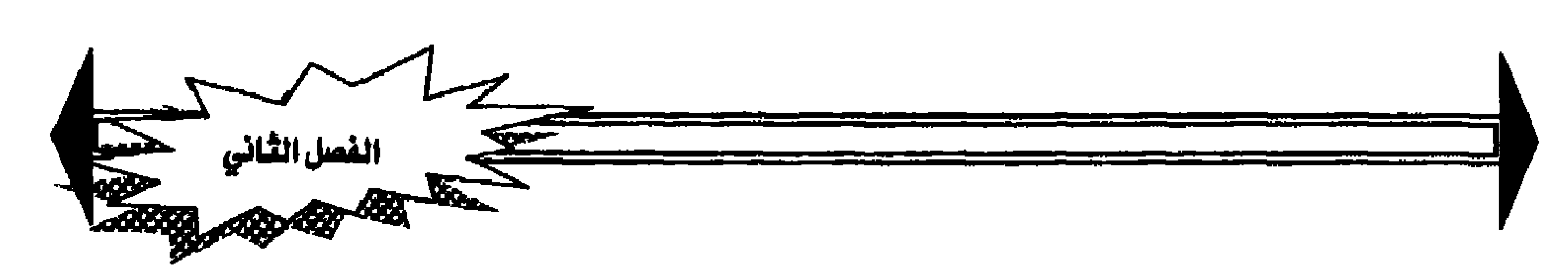
دب= جا ل در + ر جتا ل . دل

ولكن: $جا ل = \frac{ر د\theta}{د ش}$ ، $جتا ل = \frac{د ر}{د ش}$

وبالتعويض نجد: $د ب = \frac{ر د ر د\theta}{د ش} + \frac{ر د ر د ل}{د ش}$

$$= \frac{ر د ر}{د ش}(د \quad + د ل) = \frac{ر د ر د\varphi}{د ش}$$

ومنه: $\frac{د ش}{د \varphi} = \frac{ر د ر}{د ب}$



وهو المطلوب:

١- أوجل نواشر المنحنى "هيبو سيكلوئيد":

$$س= ٣ ٲ (٢جتا ت - جتا ٢ت) ، ص= ٣ٲ (٢جا ت + جا ٢ت)$$

الحل:

لنحسب أولاً قوس المنحنى المفروض ش، من أجل ذلك نـشتق س و ص بالنسبة لـ ت فنجد:

$$سَ= ٦ ٲ (جا٢ت - جات) ، صَ= ٦ ٲ(جتا٢ت + جتات)$$

ويكون:

$$شَ^{٢}= سَ^{٢} + صَ^{٢}= ٧٢ ٲ^{٢} (١+جتا٣ت)= ١٤٤ٲ^{٢} جتا^{٢} \frac{٣}{٢}ت$$

وبالتالي:

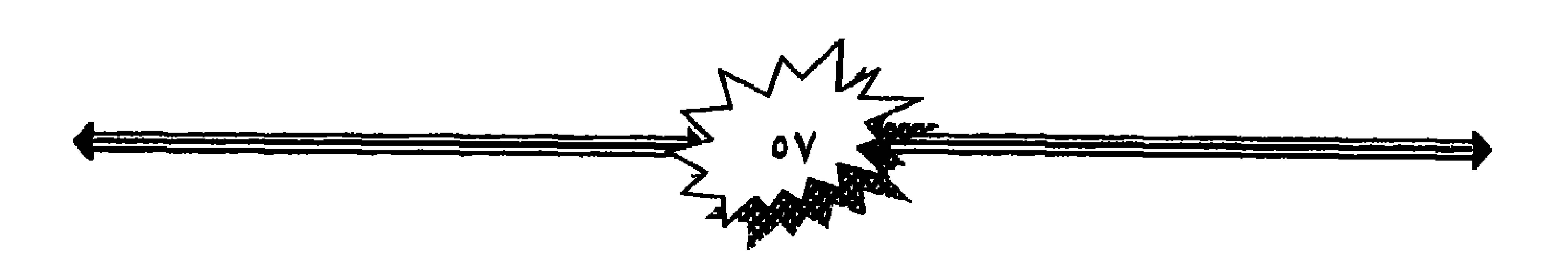
$$د ش=\pm١٢ٲ جتا\frac{٣ت}{٢}دت$$

وبالتكامل نجد:

$$ش=\pm٨ٲجا\frac{٣ت}{٢}+جـ_{١}$$

لنحسب بعد ذلك جيوب تمام توجيه المماس $\frac{دس}{دش}$، $\frac{دص}{دش}$:

$$\frac{دس}{دش}=\frac{٦ٲ(جا٢ت-جات)}{\pm١٢ٲ جتا\frac{٣}{٢}ت دت}دت=\pm جا\frac{ت}{٢}$$





$$\frac{دص}{دش}=\frac{٦أ(جتا٢ت-جتات)دت}{\pm١٢أ\ جتا\frac{٣ت}{٢}دت}=\pm\ جتا\frac{ت}{٢}$$

بالتعويض في معادلات النواشر:

$$س^{(١)}=س+(جـ-ش)\frac{دس}{دش}\ ،\ ص^{(١)}=ص+(جـ-ش)\frac{دص}{دش}$$

نجد: $س^{(١)}=٣أ(٢جتات-جتا٢ت)+\left(جـ_٢+٨أجا\frac{٣}{٢}ت\right)جا\frac{ت}{٢}$

$$ص^{(١)}=٣أ(٢جات-جا٢ت)+\left(جـ_٢+٨أجا\frac{٣}{٢}ت\right)جتا\frac{ت}{٢}$$

وهذه هي معادلة النواشر المطلوبة:

من أجل الحالة الخاصة $جـ_٢=٠$ نجد:

$$س^{(١)}=أ(٢جتات+جتا٢ت)$$

$$ص^{(١)}=أ(٢جات-جا٢ت)$$

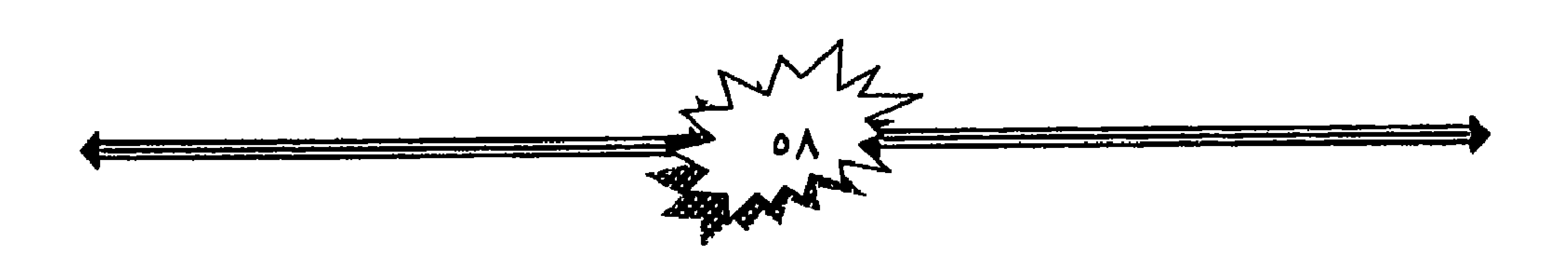
١٣- أوجد نواشر المنحنى: $٢٧ب\ ص^٢=٨(س-ب)^٣\ (ب>٠)$

الحل:

لنجد طرفي معادلة المنحنى فنجد: $ص=\pm\frac{٢}{٣}\sqrt{\frac{٢}{٣ب}}(س-ب)^{\frac{٣}{٢}}$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ س نحصل:

$$\frac{دص}{دس}=\pm\sqrt{\frac{٢}{٣ب}}\sqrt{س-ب}$$



ويكون: $\left(\frac{دش}{دس}\right)^{٢} = ١ + صَ^{٢} = ١ + \frac{٢}{٣ب}(س - ب) = \frac{ب + ٢س}{٣ب}$

ويكون بالتالي: $دش = \frac{\pm\sqrt{ب + ٢س}}{\sqrt{٣ب}} . دس$

وبالتكامل نجد: $ش = \frac{\pm ١}{٣\sqrt{٣ب}}(ب + ٢س)\sqrt{ب + ٢س} + جـ_{١}$

وإذا وجهنا المنحنى المفروض باتجاه ص المتزايدة فعندئذ يكون:

$$\frac{دس}{دش} = \frac{\pm\sqrt{٣ب}}{\sqrt{ب + ٢س}} \quad ، \quad \frac{دص}{دش} = \frac{\sqrt{٢}\sqrt{س - ب}}{\sqrt{ب + ٢س}}$$

وبالتعويض في معادلات النواشر نجد:

$$س^{(١)} = س \pm \left(جـ \pm \frac{(ب + ٢س)\sqrt{ب + ٢س}}{٣\sqrt{٣ب}}\right)\frac{\sqrt{٣ب}}{\sqrt{ب + ٢س}}$$

$$ص^{(١)} = \mp \frac{٢}{٣}\sqrt{\frac{٢}{٣ب}}(س - ب)^{\frac{٣}{٢}} + \left(جـ \pm \frac{(ب + ٢س)\sqrt{ب + ٢س}}{٣\sqrt{٢ب}}\right)\frac{\sqrt{٢}\sqrt{س - ب}}{\sqrt{ب + ٢س}}$$

من أجل الحالة جـ = ٠ نجد:

$$س^{(١)} = س - \frac{ب + ٢س}{٣} = \frac{س - ب}{٣}$$

$$ص^{(١)} = \pm\frac{١}{٣}\sqrt{\frac{٢}{٣ب}}\sqrt{س - ب}(٢س - ٢ب - ب - ٢س) = \pm\frac{\sqrt{٢ب}}{\sqrt{٣}}\sqrt{س - ب}$$

وبحذف الوسيط س من المعادلتين نجد المعادلة: $\left(ص^{(١)}\right)^{٢} = ٢ب س$

١٤- لدينا المنحنى:

$$س = أجتا^{٣}ت \text{ ، } ص = أجا^{٣}ت \quad ٠ \le ت \le \frac{\pi}{٢}$$



لنوجه المنحنى وفق قيم ت المتزايدة:

١- احسب قوس المنحنى من النقطة ت = ٠ إلى النقطة ت = $\frac{\pi}{٢}$

٢- احسب مركبات شعاع وحدة المماس ومركبات شعاع وحدة الناظم الأساسي في نقطة ما م من المنحنى.

٣- اكتب معادلة المماس والناظم في النقطة م.

٤- احسب نصف قطر التقوس واكتب معادلات منشور المنحنى.

الحل:

١- التفاضل كلاً من س و ص فنجد:

دس= -٣أ جتا^{٢}ت جات دت

دص= ٣أ جا^{٢}ت جتات دت

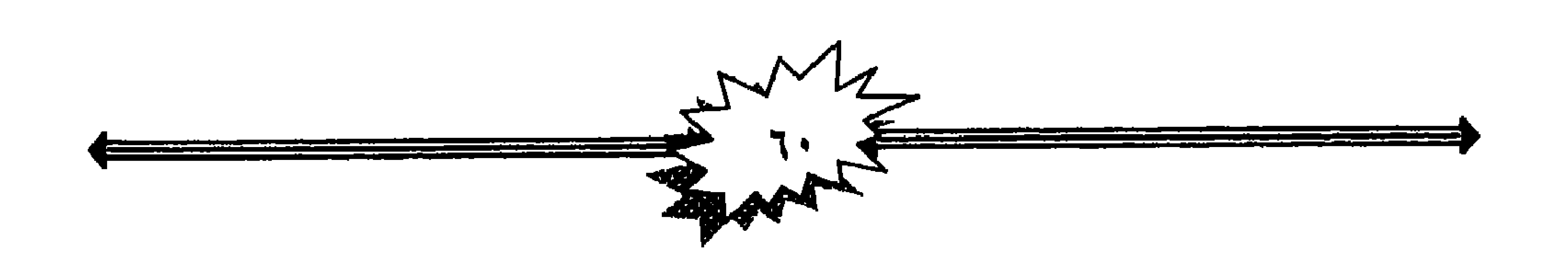
ويكون $\overline{\text{دش}^{٢}}$=$\overline{\text{دس}^{٢}}$+$\overline{\text{دص}^{٢}}$ = ٩ أ^{٢}جا^{٢}ت جتا^{٢}ت دت^{٢}.

وبالتالي: دس= ± ٣ أجات جتا دت= ± $\frac{٣أ}{٢}$جا٣ت دت

ولما كان جا٢ت ≤ ٠ في المجال المفروض والمنحنى موجه وفق قيم ت المتزايدة فإننا نختار الإشارة +. أي:

دس= $\frac{٣أ}{٢}$جا٢ت دت

ويكون طول قوس المنحنى من النقطة ت = ٠ إلى النقطة ت = $\frac{\pi}{٢}$



$$\text{ش}=\left[\frac{-٣أ}{٤}\ \text{جتا}٢\text{ت}\right]^{\frac{\pi}{٢}}=\frac{٣أ}{٤}+\frac{٣أ}{٤}=\frac{٣أ}{٢}$$

٢- مركبات شعاع وحدة المماس هي:

$$\alpha=\frac{\text{دس}}{\text{دش}}=\frac{-٣أ\ \text{جتا}^{٢}\text{ت جات دت}}{٣أ\text{جات جتات دت}}=-\ \text{جتات}$$

$$B=\frac{\text{دص}}{\text{دش}}=\frac{٣أ\text{جا}^{٢}\text{ت جتات دت}}{٣أ\text{جات جتات دت}}=\text{جات}$$

من أجل حساب مركبات شعاع وحدة الناظم الأساسي يلـزم أن نحـسب عنصر القوس على الدليل الكروي الأول:

$$\overline{\text{د}\delta^{٢}}=\overline{\text{د}\alpha^{٢}}+\overline{\text{د}B^{٢}}=(\text{جا}^{٢}\text{ت}+\text{جتا}^{٢}\text{ت})\overline{\text{دت}^{٢}}=\overline{\text{دت}^{٢}}$$

ومنه: $\text{د}\delta=\pm\ \text{دت}$

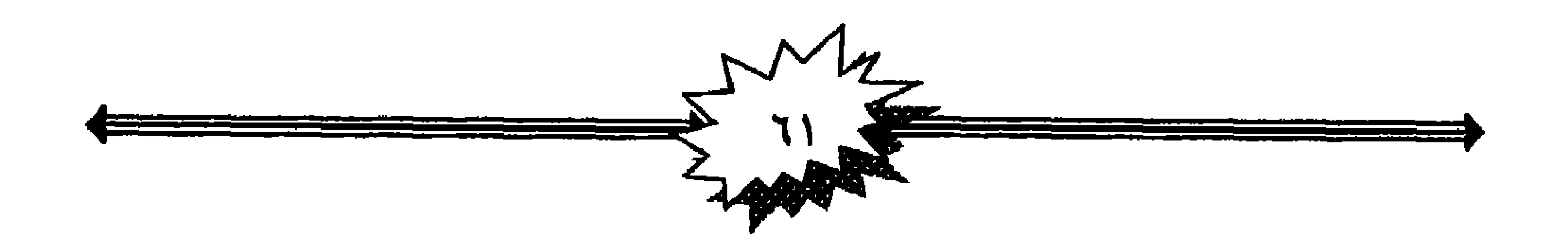
إلا أننا نختار جهة على الـدليل الكـروي الأول علـى شـكل يكـون فيـه $\frac{\text{دش}}{\text{د}\delta}>٠$ **ولذلك نكتفي بإشارة +** $\text{د}\delta=\text{دت}$

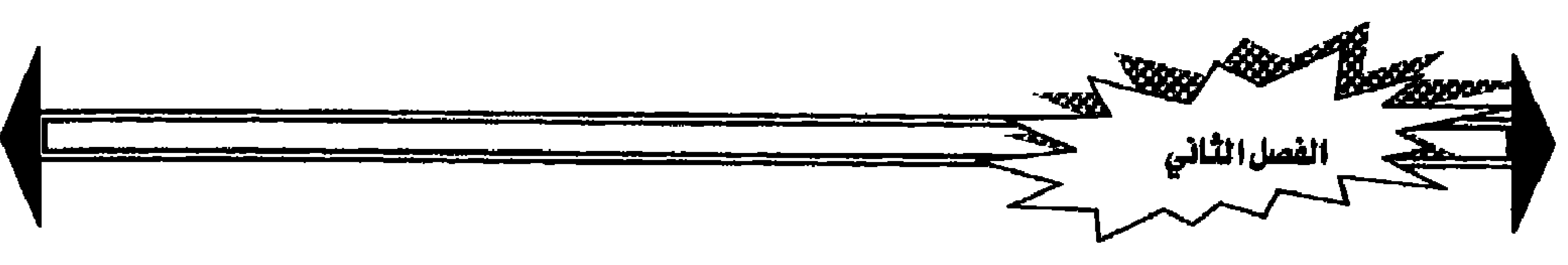
وهكذا نجد مركبات شعاع وحدة الناظم الأساسي:

$$\alpha_{١}=\frac{\text{د}\alpha}{\text{د}\delta}=\frac{\text{جات دت}}{\text{دت}}=\text{جات}$$

$$B_{١}=\frac{\text{د}B}{\text{د}\delta}=\frac{\text{جتات دت}}{\text{دت}}=\text{جتات}$$

٣- أن المستقيم المماس في النقطة م يوازي الشعاع ت[1] (α، β) لـذلك فـإن معادلته هي:





$\frac{\text{س}^{(1)} - \text{ا جتا}^3\text{ت}}{-\text{ جتا}3} = \frac{\text{ص}^{(1)} - \text{اجا}^3\text{ت}}{\text{جات}}$ أو س$^{(1)}$ جات + ص$^{(1)}$جتات= ا جتات جات

أما الناظم فإنه يوازي الشعاع م(α_1، β_1) فمعادلته:

$\frac{\text{س}^{(1)} - \text{ا جتا}^3\text{ت}}{\text{جات}} = \frac{\text{ص}^{(1)} - \text{اجا}^3\text{ت}}{\text{جتات}}$ أو س$^{(1)}$ جتات - ص$^{(1)}$جات= اجتا٢ت

٤- أما نصف قطر التقوس Q فيمكن حسابه مباشرة من التعريف:

$Q = \frac{\text{د ش}}{\text{د}\,\delta} = \frac{\text{٣ا جات جتات د ت}}{\text{د ت}} =$ ٣ ا جات جتات

من أجل إيجاد معادلة المنشور نعوض في المعادلات:

س$^{(1)}$= س + $Q\,\alpha_1$ ، ص$^{(1)}$= ص + $Q\,\beta_1$

فنجد: س$^{(1)}$= ا جتا^{3}ت + ٣ ا جا^{2}ت جتات = ا جتات (١+٢جا^{2}ت)

ص$^{(1)}$= ا جتا^{3}ت + ٣ ا جات جتا^{2}ت= ا جات (١+٢جتا^{2}ت)

وهذه هي المعادلات الوسيطية للمنشور. لإيجاد المعادلة الديكارتية نحذف الوسيط ت، من أجل ذلك نلاحظ:

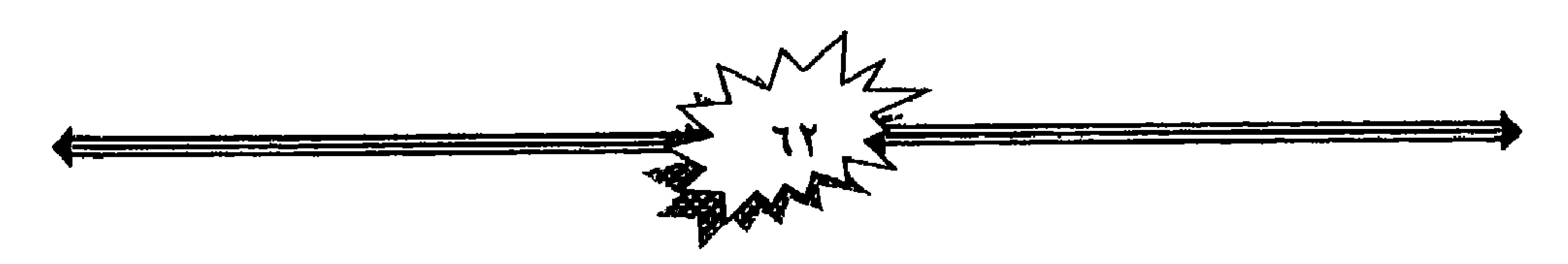
س$^{(1)}$ + ص$^{(1)}$= ا(١+جا٢ت) (جتات + جات)

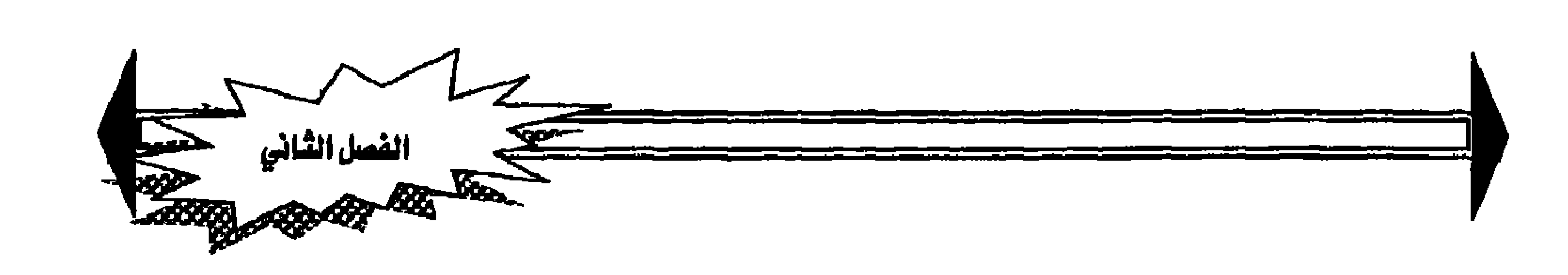
س$^{(1)}$ - ص$^{(1)}$= ا(١-جا٢ت) (جتات - جات)

بتربيع هاتين المعادلتين نجد: (س+ص)^2= ا^2(١+جا٢ت)^3

ومنه (س-ص)^2= ا^2(١-جا٢ت)^3

: (س+ص)$^{\frac{2}{3}}$ +(س-ص)$^{\frac{2}{3}}$ =٢ا$^{\frac{2}{3}}$ وهو المطلوب.





تمارين محلولة

١- احسب نصف قطر تقوس المنحنى: $ر^{٢} = ﻫ^{٢}جتا^{٢}\varphi$

من أجل $\varphi = ٠$

احسب أعظم تقوس للمنحنيات:

٢- $ص = ﻫ \text{ لو } (١ - \frac{س^{٢}}{ﻫ^{٢}})$

٣- س = ﻫ جتات ، ص = ب جات

٤- احسب إحداثيات مركز تقوس المنحنى ص = س لوس

وذلك في النقطة التي يكون من أجلها صَ = ٠

٥- احسب إحداثيات مركز تقوس المنحنى: $ر = ﻫجتا٣\varphi$

٦- عين منشور المنحنى: س = ﻫجتا(قعطي) ت، ص= ت جا(قطعي) ت

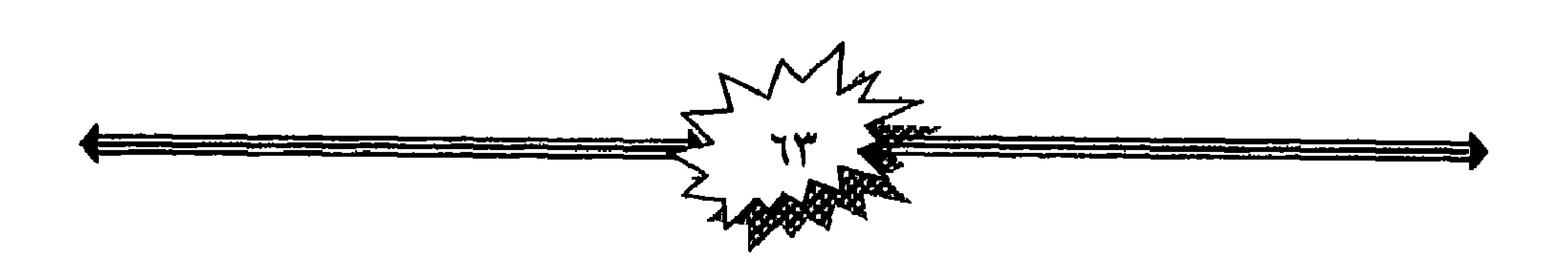
٧- عين منشور المنحنى "كارديوئيد": $ر = ﻫ (١ + جتا\varphi)$

٨- أوجد نواشر الدائرة: $س^{٢} + ص^{٢} = ﻫ^{٢}$

برهن أن أزواج المنحنيات الآتية تتقاطع تحت زاوية قائمة:

٩- $س^{٢} - ص^{٢} = ﻫ^{٢}$ ، $س ص = ب^{٢}$

١٠- $ر = ﻫ هـ^{\varphi}$ ، $ر = ب هـ^{-\varphi}$





١١- $ر^٢$ = لو ظا φ ، $ر^٢$ جتا٢ φ + ١ = ٠

١٢- برهن أن قطع الناظم للمنحني:

س = ٢ ٲجات + ٲجات $جتا^٢$ت ، ص= - ٲ$جتا^٣$ت

المحصورة بين المحورين الإحداثيين مساوية إلى ٢ ٲ

الأجوبة:

١- ٲ، ٢- $\frac{-٢}{ٲ}$ ، ٣- $\frac{-ٲ}{ب^٢}$ ، ٤- ($هـ^{-١}$، ٠)

٥- $س^{(١)} = \frac{٣ٲ جتا^٢\varphi(١+٨جا^٤\varphi)}{٤(١+٢جا^٢\varphi)}$ ، $ص^{(١)} = \frac{-٦ٲجا^٢\varphi\ جتا^٣\varphi}{١+٢جا^٢\varphi}$

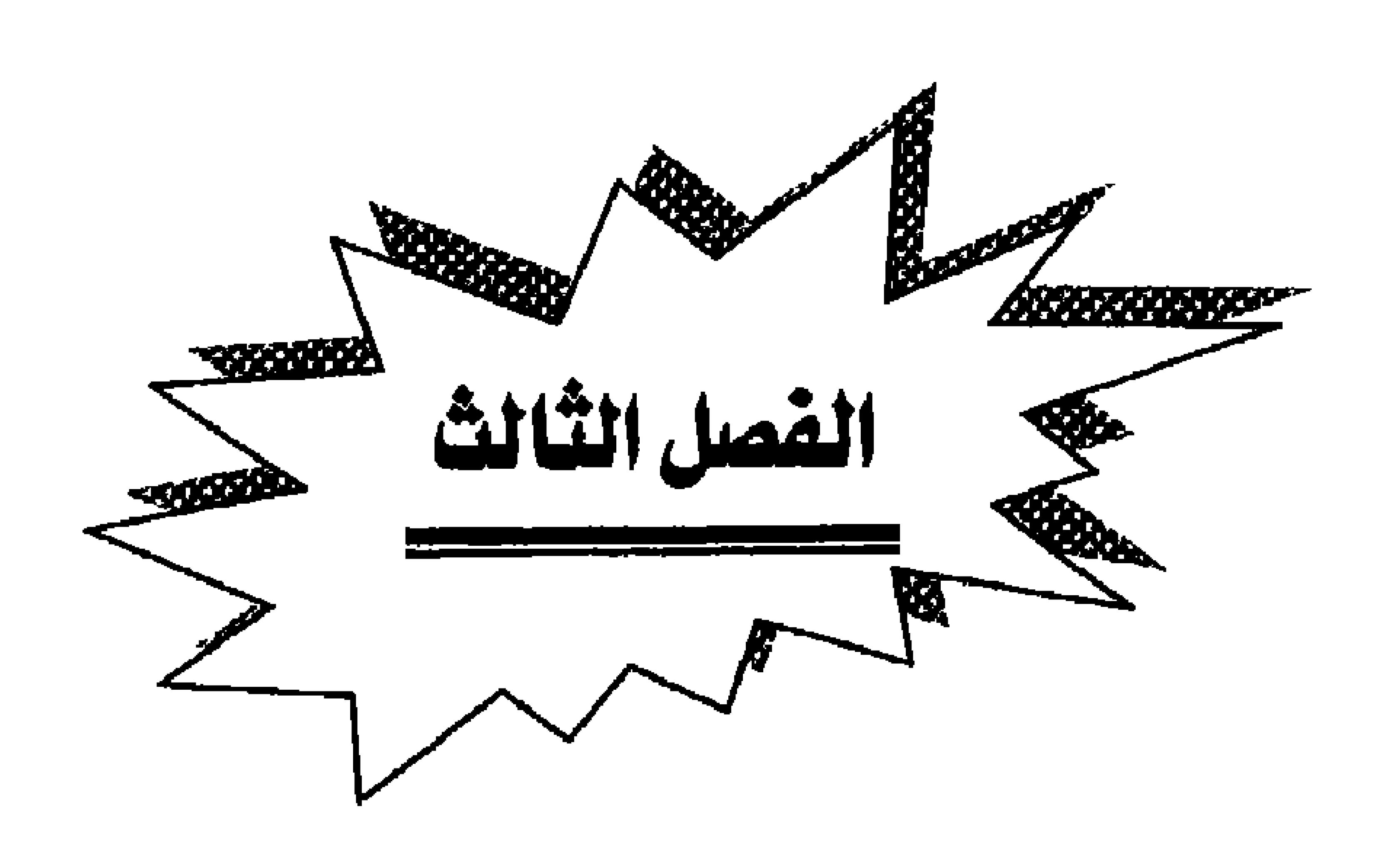
٦- (ٲس) = $\frac{[٣(س+\Delta س)-٢]-(٣س-٢)}{\Delta س} = \frac{٣\Delta س}{\Delta س} = ٣$ - (ب ص) ½ =

($ٲ^٢$+ $ب^٢$) ½،

٧- كارديوئيد

٨- س = ٲ(جتات + ت جات)، ص= ٲ(جات - ت جتات)





المجالات وحلقات الحدوديات

Fields and Rings of Polynomials

الفصل الثالث

المجالات وحلقات الحدوديات

Fields and Rings of Polynomials

مبادئ وخواص أولية:

تلعب المجالات دوراً هاماً في الهندسة، نظرية المعادلات، ونظرية الأعداد.

نعطي هنا معالجة لهذا الموضوع وأهميته علماً بأن هذا الكتاب لن يتعرض لنظرية جالو (Galios) لأن ذلك يفيد أكثر من المحصلة التي وصل إليها الطالب في هذا المستوى.

تعريف: كل حلقة تبديلية ذات عنصر محايد والتي فيها كل عنصر ١ يختلف عن الصفر معكوس تسمى مجالاً.

مثال (١):

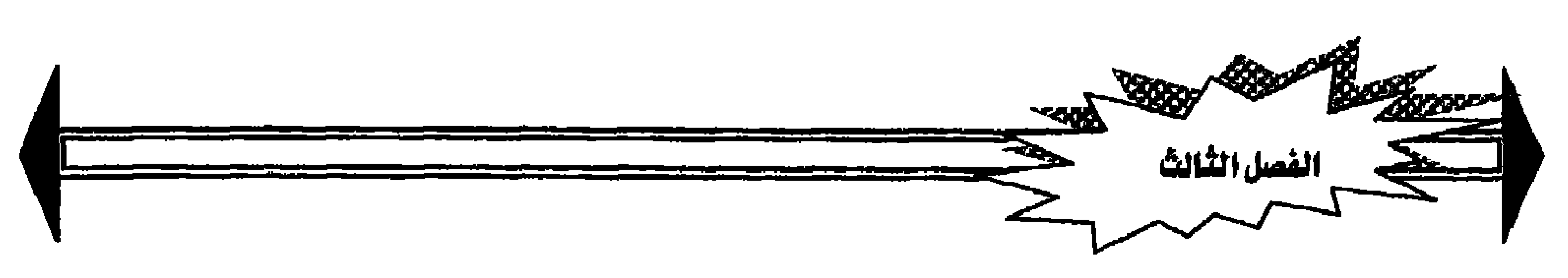
الأعداد الحقيقية ح مع عمليتي الجمع والضرب تكون مجالاً.

مثال (٢):

الأعداد القياسي ك مع عمليتي الجمع والضرب تكون مجالاً.

هذه أمثلة لمجالات لا نهائية مع العلم بأن هنالك مجالات منتهية والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٣): المجموعة $ط_{٥} = \{\bar{٠}،\bar{١}،\bar{٢}،\bar{٣}،\bar{٤}\}$ مع عمليتي الجمع والضرب بمقياس ٥ تكون مجال.



مبرهنة: أي مجال يكون منطقة صحيحة.

البرهان:

بفرض أن ؍ب = ؍جـ حيث ؍، ب، جـ ∈ ں وں مجال و؍ ≠ ٠ لهذا فإن ؍ له معكوس في ں.

إذن $؍^{-1}$ (؍ ب) = $؍^{-1}$ (؍ جـ)

($؍^{-1}$ ؍) ب = ($؍^{-1}$ ؍) جـ

ب = جـ

هذا يعني أن ں لا يحتوي على قواسم للصفر.

إذن باستخدام المبرهنة نستطيع القول بأن ں منطقة صحيحة.

ملاحظة: عكس المبرهنة السابقة ليس صحيحاً دائماً، فعلى سبيل المثال ع منطقة صحيحة ولكنها ليست مجال.

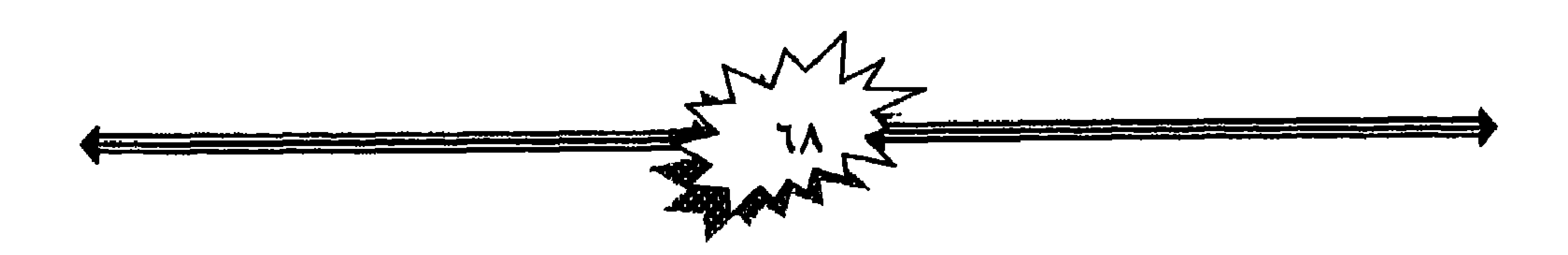
المبرهنة التالية توضح الحالة التي يكون فيها العكس صحيح.

مبرهنة: أي منطقة صحيحة منتهية تكون مجالاً.

البرهان:

بفرض أن د= {٠، ١، $؍_1$، $؍_2$،.......$؍_ن$} منطقة صحيحة منتهية.

د لا تحتوي على قواسم للصفر، وباستخدام مبرهنة سابقة، قانون الحذف متحقق في د، ومن ذلك نجد أن كل العناصر الآتية مختلفة ؍، ؍$؍_1$، ؍$؍_2$، ؍$؍_3$،.......؍$؍_ن$.



وكل هذه العناصر تختلف عن الصفر، هذا يعني أن هذه العناصر هي عبارة عن ١، أ، أ$_{٢}$، أ$_{٣}$.... أ$_{ن}$ في ترتيب ما وبالتالي فإن أ.١=١، وهذا يؤدي إلى أن أ=١، أو هناك ي حيث أ أ$_{ي}$=١ وهذا يعني أن أ$_{ي}$ معكوس ضربي للعنصر أ وبالتالي يكون لكل أ $\neq$ ٠ معكوس إذن د مجال.

ملاحظات:

١) أي مجال يحتوي عنصرين على الأقل.

٢) المجال لا يحتوي قواسم للصفر.

٣) المجموعة ل من المجال ف تكون مجالاً جزئياً إذا كانت ل مجال بالنسبة لنفس العمليات المعرفة على ف.

فمثلاً ك مجال جزئي من المجال ح.

ط$_{ن}$ تكون مجالاً إذا وإذا كان فقط ن عدد أولي، وذلك لأنه باستخدام النتيجة ٢ في الفصل السابق ط$_{ن}$ منطقة صحيحة إذا وإذا كان فقط ن عدد أولي، ومن المبرهنة السابقة يصبح ط$_{ن}$ مجال.

مبرهنة: الحلقة التبديلية ذات العنصر المحايد ح تكون مجالاً إذا وإذا كان فقط ح تحوي مثاليتين فقط هما ح، {٠}.

البرهان:

إذا كان ح مجال نفرض أن (و) مثالية في ح، $\neq$ {٠}، هذا يعني أنه بوجد ٠ $\neq$س$\in$و وحيث أن ح مجال فإن س$^{-١}$ $\in$ ح الآن لكل ر $\in$ ح، فإن ر = ١.ر = (س س$^{-١}$).ر



= س (س$^{-1}$ ر) ∋ و

إذن ح ≥ و أي أن ح = و

العكس: إذا كانت ح تحوي مثاليتين فقط هما ح، {٠}.

للوصول إلى المطلوب يكفي إثبات أن لكل ٠ ≠ س ∋ ح يوجد معكوس. نفرض أن

٠ ≠ س ∋ ح، وحيث أن ح حلقة تبديلية فإن المجموعة ز = {س ر : ر ∋ ح} مثالية في ح.

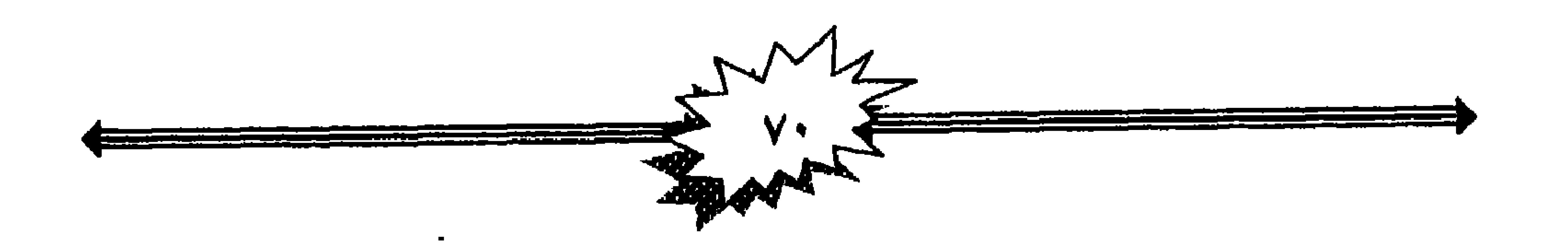
كما نلاحظ أن ز ≠ ٠، لأن س ≠ ٠، س = س.١ ∋ ز، ولكن من المعطيات ح تحوي مثاليتين فقط هما ح، {٠}، إذن ح = ز ومن ذلك نجد أن ١ ∋ ز وبالتالي فإنه يوجد ص ∋ ح حيث س ص = ١، وهذا يعني أن ص معكوس للعنصر س، ولهذا فإن ح مجال.

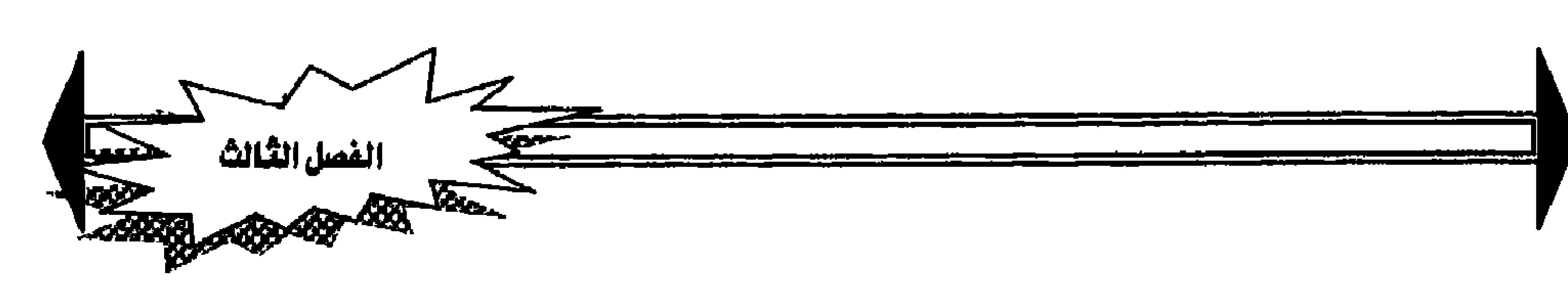
مبرهنة: إذا كانت ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و(و) مثالية في ح فإن (و) تكون مثالية عظمى إذا وإذا كان فقط ح/ و مجال.

البرهان:

ليكن θ : ح ⟵ ح/ و التشاكل الطبيعي المعرف كالآتي θ (ر) = ر + ولكن ر ∋ ح.

واضح أن ح/ و حلقة تبديلية ذات عنصر محايد. إذا كانت ك مثالية في الحلقة ح/ و فإن θ^{-1} (ك) مثالية في ح حيث و ≥ θ^{-1} (ك) أي أن و ≥ θ^{-1}(ك) ≥ ح، ولكن من المعطيات و مثالية عظمى، فمن ذلك نجد أن:





θ^{-1}(ك) = و أو θ^{-1}(ك) = ح أي أن ك = $\theta\ \theta^{-1}$ (ك) = θ (و) = ٠

أو ك = $\theta\ \theta^{-1}$ (ك) = θ (ح) = ح/ و

إذن من المبرهنة السابقة يكون ح/ و مجال.

العكس: إذا كان ح/ و مجال نحاول إثبات أن و مثالية عظمى – بفرض أن ن(١) مثالي في ح حيث و $\subsetneq$ ن(١).

إذن يمكن إيجاد أ $\in$ ن، أ $\notin$ و.

θ (و) $\leq$ θ (ن(١)) $\leq$ ح/ و

ولكن θ (أ) = أ + و $\neq$ و وهذا يعني أن θ (ن) $\neq$ ٠ وحيث أن ح/ و مجال فإن θ(ن) = ح/ و، لهذا يكون لكل ر $\in$ ح فإن θ (ر) $\in$ θس(١)، أي أن ر + و = ن + و لبعض ن $\in$ن(١)

إذن ر = ن + س لبعض س $\in$ ١، ن$\in$ن ولكن س $\in$ ١ $\leq$ ن(١)، لهذا فإن ر = ن + س $\in$ ن(١)

إذن ح = ن(١)، وهذا يوضح أن و مثالية عظمى في ح.

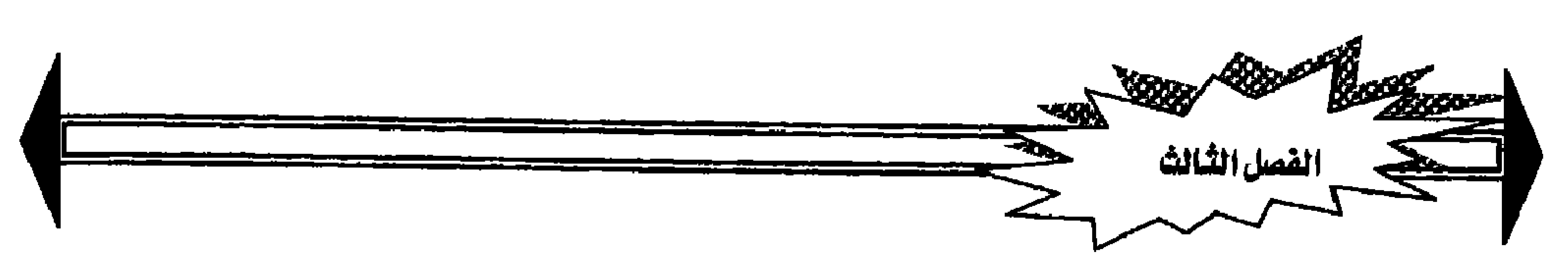
نتيجة (١): الحلقة ح تكون مجال إذا وإذا كان فقط {٠} مثالية عظمى في ح.

البرهان:

إذا كان ح مجال، فإن ح/ {٠} مجال، وذلك لأن ح $\cong$ ح/ {٠}.

وباستخدام المبرهنة السابقة {٠} مثالية عظمى.





العكس: إذا كانت {٠} مثالية عظمى، فإن استخدام المبرهنة السابقة يوصلنا إلى استنتاج أن ح/ {٠} مجال، أي أن ح مجال.

مبرهنة:

إذا كان ى مجالاً و ح حلقة ذات عنصر محايد و$\varnothing$: ى ⟵ ح تشاكل. فإن φ إما أن تكون أحادية أو تكون التشاكل الصفري. أي لكل س ∈ ى فإن φ (س) = ٠

البرهان:

ليكن φ : ى ⟵ ح تشاكل.

إذا كان φ (س) = ٠ لكل س ∈ ى في هذه الحالة تصبح φ تشاكل صفري ويكون البرهان قد انتهى.

إذا لم تكن φ تشاكل صفري عندئذ يوجد س ∈ ى. بحيث φ (س) ≠ ٠، ولهذا فإن س ∉ تشاكل φ

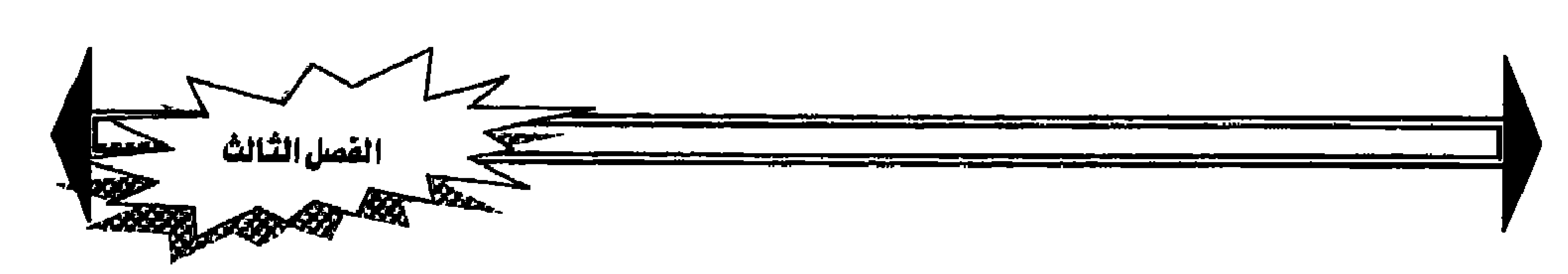
أي أن تشاكل φ ≠ ى، وحيث أن تشاكل φ مثالية في ى، وى مجال وحسب النتيجة السابقة ى لا تحوي إلا مثاليتين فقط هما {٠} و ى.

إذن تشاكل φ = {٠}، وباستخدام المبرهنة السابقة لا بد أن يكون φ تشاكل أحادي.

مجال كسور المنطقة الصحيحة:

لنفرض أن ح منطقة صحيحة إذا كانت د = {(أ، ب): أ، ب ∈ ح، ب ≠ ٠} تعرف العلاقة ~ كالآتي:





لكل ($أ_1$، $ب_1$)، ($أ_2$، $ب_2$) ∋ د فإن ($أ_1$، $ب_1$) ~ ($أ_2$، $ب_2$) إذا وإذا كان فقط $أ_1$، $ب_2$ = $أ_2$، $ب_1$ للحصول على مجال من هذه المنطقة الصحيحة نحتاج إلى الآتي:

مبرهنة: العلاقة ~ المعرفة أعلاه على المجموعة د علاقة متكافئة.

البرهان:

نتحقق من أن العلاقة ~ عاكسة ومتماثلة وناقلة.

١) لكل (أ، ب) ∋ د فإن أ ب = ب أ لأن ح حلقة تبديلية لهذا فإن (أ، ب) ~ (أ، ب)

أي أن ~ عاكسة.

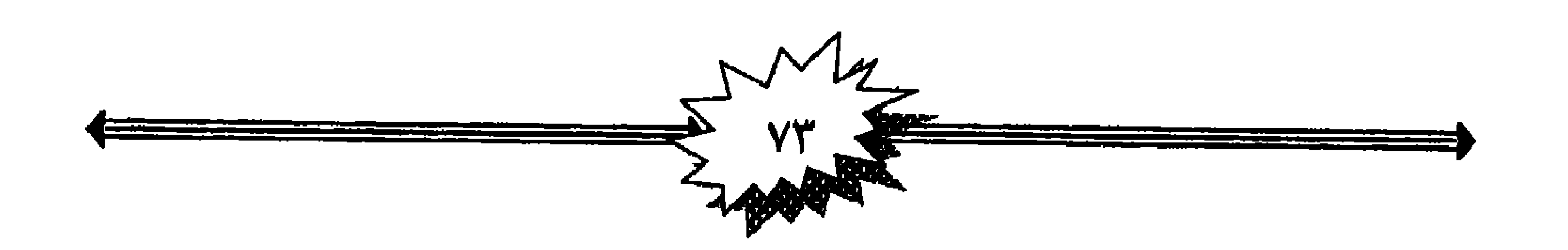
٢) إذا كان (أ، ب) ~ (جـ ، ب) فإن أ د = جـ ب وحيث أن جـ ب = أ د فإن (جـ، د) ~ ($أ_1$، $ب_1$) أي أن ~ متماثلة.

٣) إذا كان (أ، ب) ~ (جـ، د)، (جـ، د) ~ (ر، س) فهذا يؤدي إلى أن جـ س = ر د، أ د = جـ ب.

من العلاقتين السابقتين واستخدام الحقيقية بأن ح حلقة تبديلية نحصل على

أ س د = س أ د = س جـ ب = جـ س ب = ر د ب = ر ب د

وحيث أن د ≠ ٠، ح منطقة صحيحة فإن أ س = ر ب، وهذا يعني أن (أ، ب) ~ (ر، س) وبهذا تكون العلاقة ناقلة.





ومن ١، ٢، ٣ نستنتج أن العلاقة ~ هي علاقة تكافؤ على المجموعة د.

ملاحظات:

١) علاقة التكافؤ ~ تقسم المجموعة د[1] إلى فصول تكافؤ منفصلة.

٢) فصل التكافؤ للعنصر (ﻫ، ب) نرمز له بالرمز [(ﻫ، ب)].

٣) إذا كانت $ن_د$ هي مجموعة كل فصول التكافؤ يمكن تعريف على المجموعة $ن_د$ عمليتي جمع وضرب كما يلي:

إذا كان $[(ﻫ_١، ب_١)]، [(ﻫ_٢، ب_٢)] \in ن_د$

$$[(ﻫ_١، ب_١)] + [(ﻫ_٢، ب_٢)] = [(ﻫ_١ ب_٢ + ﻫ_٢ ب_١، ب_١ ب_٢)]$$

$$[(ﻫ_١، ب_١)] . [(ﻫ_٢، ب_٢)] = [(ﻫ_١ ﻫ_٢، ب_١ ب_٢)]$$

مبرهنة: المجموعة $ن_د$ مع العمليتين المعرفتين أعلاه تكون مجالاً.

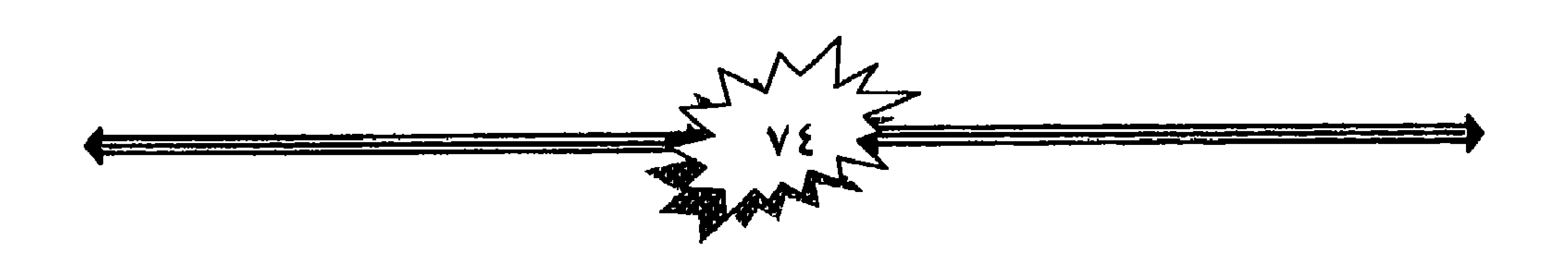
البرهان:

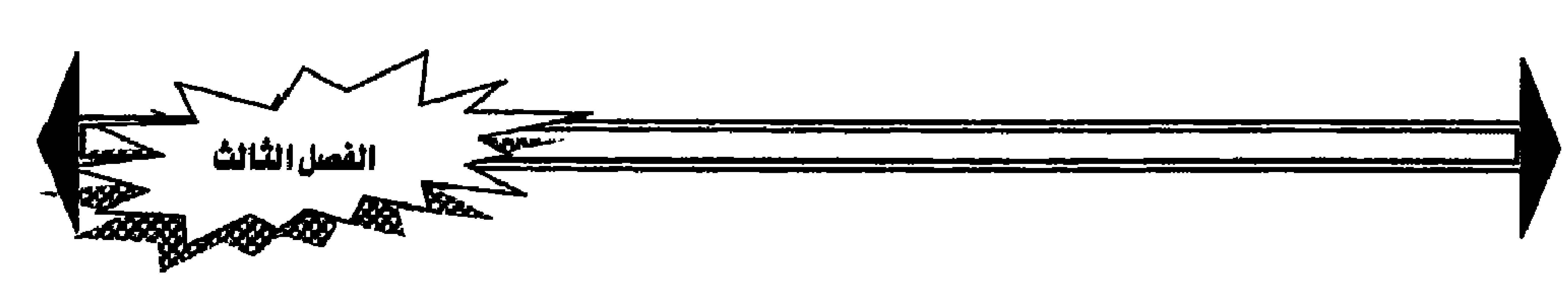
١) إذا كان $[(ﻫ، ب)]، [(جـ، د)] \in ن_د$ فإن $(ﻫ، ب)، (جـ، د) \in د$[1]

أي أن $ب \neq ٠$، $د \neq ٠$ وحيث أن ح منطقة صحيحة فإن $ب د \neq ٠$
لهذا فإن $[(ﻫ جـ، ب د)]$ و $[(ﻫ د + ب جـ، ب د)] \in ن_د$

٢) نبين أن العمليات السابقة معرفة تعريفاً جيداً، أي أن هاتين العمليتين منسجمتين مع علاقة التكافؤ.

نفرض أن $(جـ_١، د_١) \in [(جـ، د)]$، $(ﻫ_١، ب_١) \in [(ﻫ، ب)]$





الآن (أ$_1$، ب$_1$) $\in$ [(أ، ب)] تعني أن (أ$_1$، ب$_1$) $\sim$ (أ، ب) أي أن:

أ$_1$ ب = ب$_1$ أ

وبالمثل (جـ$_1$، د$_1$) $\in$ [(جـ، د)] تؤدي إلى أن جـ$_1$ د = د$_1$ جـ

بضرب العلاقة الأولى في د$_1$ د والعلاقة الثانية في ب$_1$ ب، ثم الجمع نحصل على الآتي:

أ$_1$ ب د$_1$ د + جـ$_1$ د ب$_1$ ب = ب$_1$ أ د$_1$ د + د$_1$ جـ ب$_1$ ب

باستخدام خواص المنطقة الصحيحة ح نحصل على:

(أ$_1$ د$_1$ + ب$_1$ جـ$_1$) ب د = ب$_1$ د$_1$ (أ د + ب جـ)

إذن (أ$_1$ د$_1$ + ب$_1$ جـ$_1$ + ب$_1$ د$_1$) $\sim$ (أ د + ب جـ، ب د)، ولهذا فإن

(أ$_1$ د$_1$ + ب$_1$ جـ$_1$ + ب$_1$ د$_1$) $\in$ [(أ د + ب جـ ب د)]

ومن ذلك نستطيع القول بأن الجمع معرف تعريف جيد.

بالنسبة لعملية الضرب: من المعادلتين أ$_1$ ب = ب$_1$ أ

جـ$_1$ د = د$_1$ جـ

نحصل على أ$_1$ب جـ$_1$د = ب$_1$ أد$_1$جـ

وحيث أن الضرب تبديلي في ح إذن أ$_1$جـ$_1$ب د = ب$_1$د$_1$ أجـ

وهذا يعني أن (أ$_1$جـ$_1$، ب$_1$د$_1$) $\sim$ (أجـ ب د)، أي أن (أ$_1$جـ$_1$، ب$_1$د$_1$)$\in$[(أجـ ب د)]





٣) الجمع في ن د تبديلي:

[(أ، ب)] + [(جـ، د)] = [(أد + ب جـ، ب د)]

وكذلك [(جـ، د)] + [(أ، ب)] = [(جـ ب + د أ، دب)]

ولكن من خواص المنطقة الصحيحة ح نلاحظ أن أد + ب جـ = جـ ب + د أ

ب د = د ب إذن [(أد + ب جـ، ب د)] ~ [(جـ د + د أ، د ب)]

أي أن [(أ، ب)] + [(جـ، د)] = [(جـ، د)] + [(أ، ب)]

٤) الجمع في ن د تنسيقي

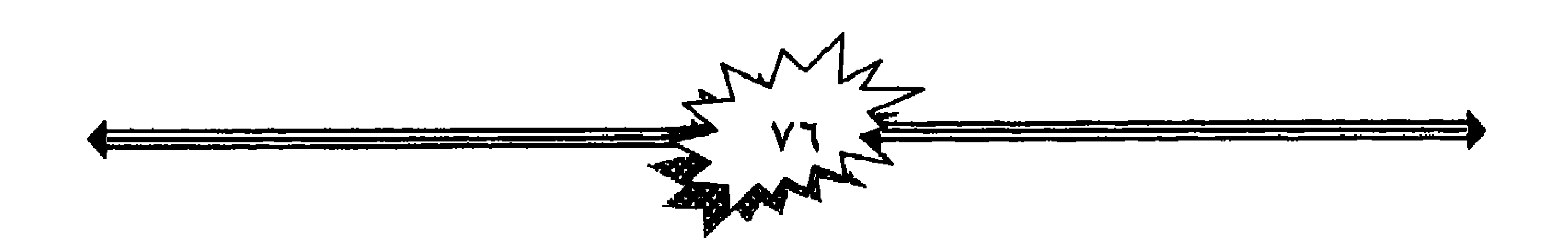
٥) يوجد عنصر محايد جمعي، وهذا العنصر هو [(٠، ١)] وذلك لأنه لكل [(أ، ب)] ∈ ن د يكون [(أ، ب)] + [(٠، ١)] = [(أ.١ + ب.(٠)، ب(١))] = [(أ، ب)]

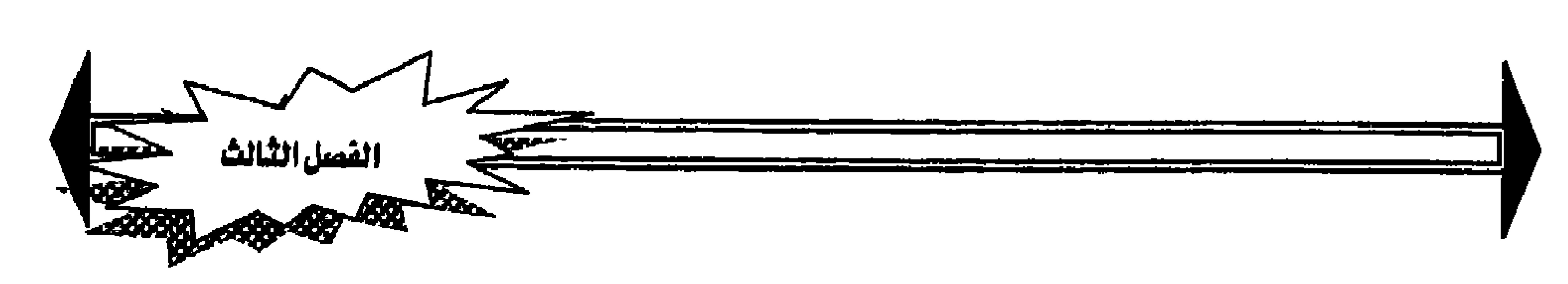
٦) لكل [(أ، ب)] ∈ ن د يوجد معكوس جمعي [(-أ، ب)] حيث [(أ، ب)]+[(-أ، ب)] = [(٠، ب)]

٧) عملية الضرب تنسيقية في ن د

٨) عملية الضرب تبديلية في ن د

٩) الضرب يقبل التوزيع على الجمع في ن د





١٠) يوجد عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب وهذا العنصر هـو [(١، ١)]، وذلـــك لأن لكـــل [(أ، ب)] ∈ ن د فـــإن [(أ، ب)] . [(١، ١)] = [(أ.١، ب.١)]=[(أ، ب)]

١١) لكـل [(أ، ب)]∈ن د، حيـث أ≠٠ يوجـد معكـوس ضـربي، وهـذا المعكوس هو

[(ب، أ)] وذلك لأنه إذا كان [(أ، ب)] ∈ ن د وكانت أ = ٠ فإن:

أ.١ = ب(٠) = ٠ لهذا فإن (أ، ب) ~ (٠، ١)

إذن [(أ، ب)] = [(٠، ١)] ولكن [(٠، ١)] هو العنصر المحايد الجمعي

إذا كان [(أ، ب)] يختلف عن العنصر الصفري في ن د

إذن أ ≠ ٠ ولهذا فإن [(ب، أ)] ∈ ن د

كما نلاحظ أن

[(أ، ب)] . [(ب، أ)] = [(أب، ب أ)] = [(أب، أب)]

ولكن (أب، أب) ~ (١، ١)

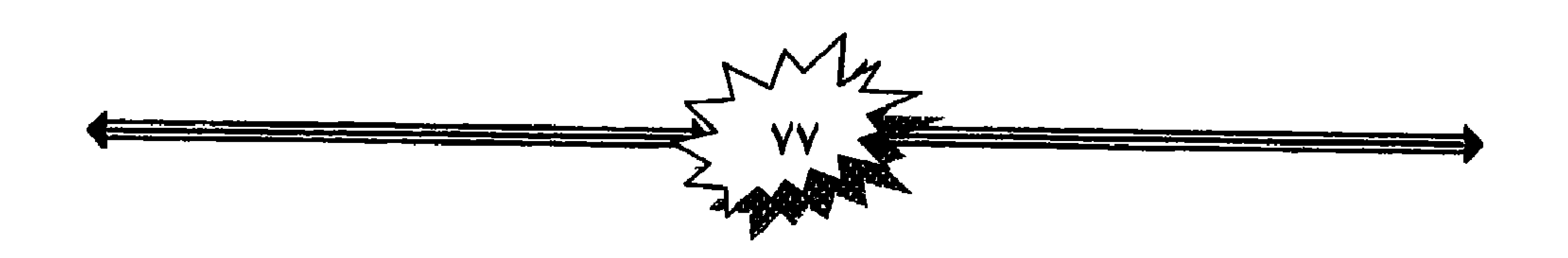
أي أن [(أب، أب)] = [(١، ١)]

إذن [(أ، ب)] . [(ب، أ)] = [(١، ١)]

نلاحظ أن جميع شروط المجال تحققت، عليه فإن ن د مجال،.

مبرهنة: الدالة ي : ص ⟵ ن د المعرفة كالآتي:

ي (أ) = [(أ، ١)] تكون تشاكل أحادي.





البرهان:

لكل ۾، ب ∋ ح

ي (۾ + ب) = [(۾ + ب، ١)]

مـــن ناحيـــة أخـــرى ي (۾) + ي(ب) = [(۾، ١)] + [(ب، ١)] = [(۾. ١ + ب.١، ١)]

= [(۾ + ب، ١)] = ي(۾+ب)

وكـــــذلك ي (۾) ي(ب) = [(۾، ١)] . [(ب.١)] = [(۾ ب، ١)] = ي(۾ب)

لهذا فإن ي تشاكل حلقي

بقي إثبات أن هذا التشاكل أحادي

نفرض أن ي (۾) = ي(ب)

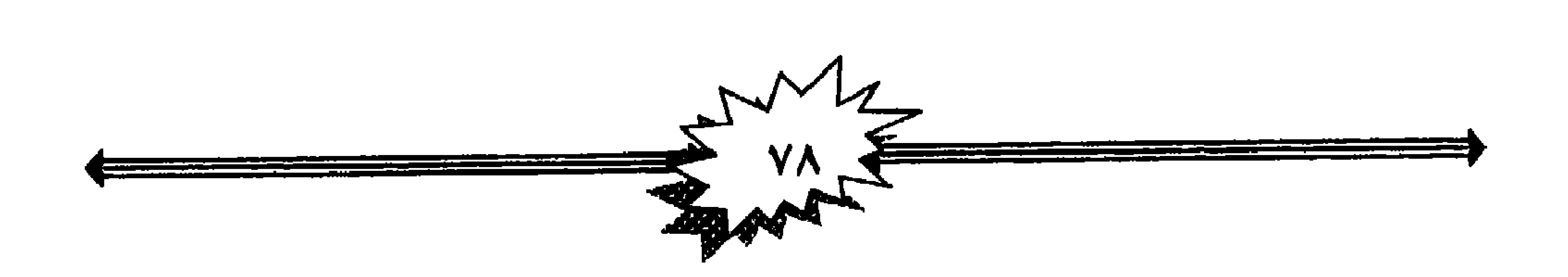
إذن [(۾، ١)] = [(ب، ١)] هذا يعني أن (۾، ١) ~ (ب، ١)

أي أن ۾.١ = ب.١ أي ۾ = ب لهذا فإن ي تشاكل أحادي

تعريف: إذا كان ى مجال، فإنه يقال عن ى أنه مجال بسيط إذا لم يحوي أي مجال جزئي غير ى نفسه.

ملاحظة:

تقاطع جميع المجالات الجزئية من المجال ى هو مجال جزئي بسيط.



مبرهنة: كل مجال بسيط ى يكون متشاكلاً تقابلياً مع المجال ك أو مع المجـال ط/ بط حيث ب عدد أولي.

البرهان:

إذا كان جميع عناصر ى والـتي هـي مـن شـكل م.١ حيـث م $\neq$ ٠ عـدد صحيح، فإنه يقع في المجال العناصر من الشكل $\frac{\text{١}}{\text{ر.١}}$، ر $\neq$ ٠ عدد صحيح.

نلاحظ أن جـ = $\left\{ \frac{\text{م.١}}{\text{ر.١}} \text{، ر}\neq\text{٠، م}\neq\text{٠، ر،م} \in \text{ط} \right\}$ مجال جزئـي مـن المجـال ى

ولكن ى مجال بسيط، فإن جـ = ى.

إذا كان ϕ : ك ⟵ ى معرفاً كالآتي:

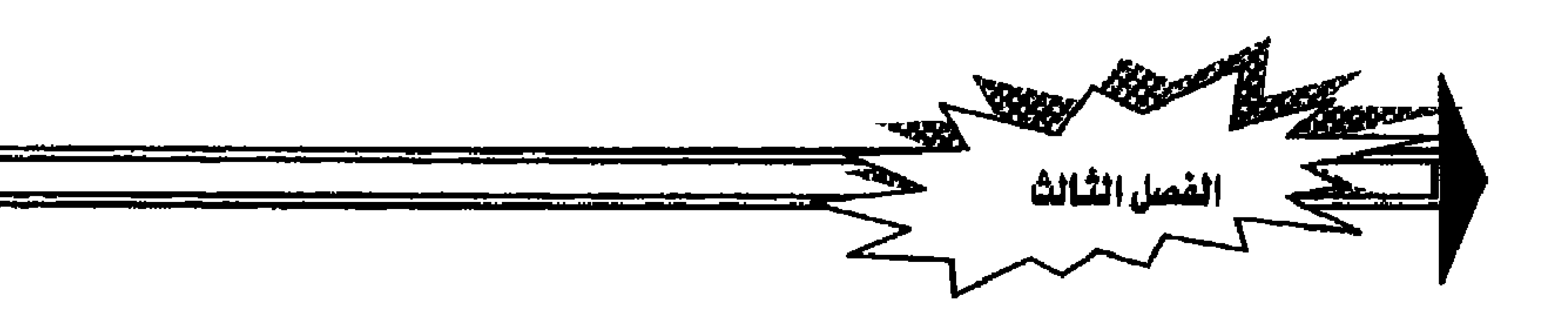
$$\phi\left(\frac{\text{م}}{\text{ر}}\right) = \frac{\text{م.١}}{\text{ر.١}} \qquad \text{لكل ك} \ni \frac{\text{م}}{\text{ر}}$$

هنا ليس من الصعب إثبات أن ϕ تشاكل أحادي وفوقي أي أن ϕ تـشاكل تقابلي من المجال ك إلى المجال ى أي أن ى $\cong$ ك.

الآن إذا وجد عـدد صـحيح ن $\neq$ ٠ بحيـث ن.١ = ٠ فـإن (-ن).١ = ٠، فـإذا كانـت ن أصـغر عـدد بحيـث ن.١= ٠، وكانـت ن = ر.س حيـث ١< ر، س < ن فإن:

$$\text{(ر.١).(س.١)}=\underbrace{\text{(١+١+.......+١)}}_{\text{(ر) مرة}}\ \underbrace{\text{(١+١+........+١)}}_{\text{(س) مرة}}=\underbrace{\text{(١+١+.......+١)}}_{\text{(ر س) مرة}}=\text{ن.١}=\text{٠}$$

أي أن (ر.١).(س.١) = ٠ وهذا يؤدي إلى أن



ر.١ = ٠ أو س.١ = ٠ ولكن هذا تناقض

لأن ن أصغر عدد بحيث ن.١ = ٠ ولهذا فإن ن عدد أولي.

إذن المجال ه يحوي العناصر الآتية: ١. ١، ٢. ١، ٣. ١،.....(ن-١) .١

الآن نعرف الدالة م: ه ⟵ $ط_ن$ كالآتي: ه (ر . ١) = $\bar{ر}$

واضح أن م تشاكل أحادي وفوقي. أي أن م تشاكل تقابلي.

ملاحظة: يقال أن مميز المجال ه هو الصفر، إذا كان مجاله الجزئي البسيط متشاكلاً تقابلياً مع المجال ك ويقال أن مميز المجال ه هو ب إذا كان مجاله الجزئي البسيط متشاكلاً تقابلياً مع المجال $ط_ب$ حيث ب عدد أولي.

حلقة الحدوديات Polynomials Ring.

في هذا البند نتعرض بشيء من الاختصار إلى الحدوديات ذات المعاملات من الحلقة ح ومن أول أهداف هذا البند هو تركيب حلقة تكون الحلقة ح حلقة جزئية منها، أما الهدف الثاني فهو دراسة خواص هذه الحلقة بشيء من التفصيل.

تعريف:

لتكن ح حلقة، يقال للمتتالية ($م_٠$، $م_١$،.....$م_ن$،...) حيث $م_ي \in$ ح و$م_ي$ = ٠ لكل ي > ن بالحدودية في المتغير س أي العوامل من الحلقة ح ويرمز لكل هذه المتتاليات بالرمز ح[س]، حيث تكتب كل حدودية على شكل ه(س) = $م_٠$ + $م_١$س+ $م_٢$$س^٢$ +.... $م_ن$$س^ن$+....



ملاحظات:

١) يسمى دليل آخر عامل مختلف عن الصفر درجة الحدودية ق(س) ويرمز لها بالرمز درجة (ق(س)) فمثلاً إذا كانت ق(س) = أ$_{0}$ + أ$_{1}$س+ أ$_{2}$س^{2} +.... أ$_{ن}$س^{ن}، أ$_{ن}$ $\neq$ ٠ فإن درجة (ق(س)) = ن

٢) يقال عن الحدوديتين ق(س)، ل(س) $\in$ ح[س] حيث

ق(س) = أ$_{0}$ + أ$_{1}$س+ أ$_{2}$س^{2} +.... أ$_{ي}$س^{ي}+........

ل(س) = ب$_{0}$ + ب$_{1}$س+ ب$_{2}$س^{2} +.... ب$_{ي}$س^{ي}+.....

إنهما متساويتان إذا كان أ$_{ي}$ = ب$_{ي}$ لكل ي

مثال (٤):

إذا كانت ح = ط فإن المتتاليات (١، ٠، ٢، ١،...(٠)، ....)، (٠، ٠، ١، ٠،....٠....) $\in$ ح [س] ولكن المتتالية (٠، ١، ٠، ١، ....، ٠، ١...) $\notin$ ح[س]

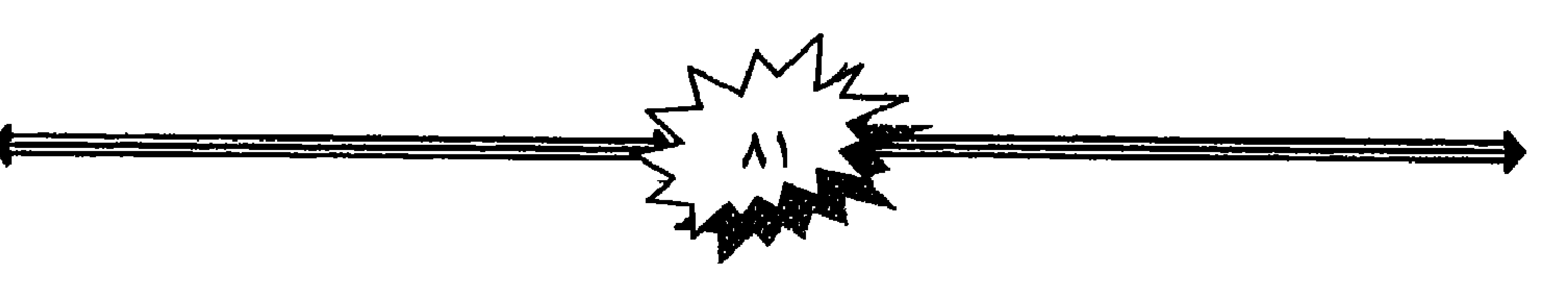
تعريف: لأي حدوديتي ق(س)، ل(س) $\in$ ح[س] حيث

ق(س) = أ$_{0}$ + أ$_{1}$س+ أ$_{2}$س^{2} +.... أ$_{ن}$س^{ن}+....

ل(س) = ب$_{0}$ + ب$_{1}$س+ ب$_{2}$س^{2} +.... ب$_{ن}$س^{ن}+....

فإن عمليتي الجمع والضرب في ح[س] تعرف كالآتي:

ق(س) + ل(س) = (أ$_{0}$ + ب$_{0}$) + (أ$_{1}$ + ب$_{1}$) س+ ... + (أ$_{ن}$ + ب$_{ن}$)س^{ن}+....



ق(س) . ل(س) = $\left(\sum_{ي=ن+ك}\right.$ أ$_{ك}$ ب$_{ن}\left.\right)$ س^{ي}

أي أن ق(س).ل(س)= أ$_{0}$ب$_{0}$+(أ$_{0}$ب$_{1}$+ أ$_{1}$ب$_{0}$)س+ (أ$_{0}$ب$_{2}$ +
أ$_{1}$ب$_{1}$+ أ$_{2}$ب$_{0}$)س^{2}+....

مبرهنة:

ح[س] مع عمليتي الجمع والضرب المعرفتين أعلاه تكون حلقة، أي أن (ح[س]، +، ٠) حلقة وتسمى حلقة الحدوديات (Ring of Polynomials) وذات المعاملات من ح.

البرهان:

لتوضيح أن + ، ٠ عمليتين ثنائيتين في ح[س]، نفرض أن

ق = (أ$_{0}$، أ$_{1}$،.... أ$_{ن}$،...)، ل = (ب$_{0}$، ب$_{1}$، ب$_{ن}$،....) $\in$ ح[س]

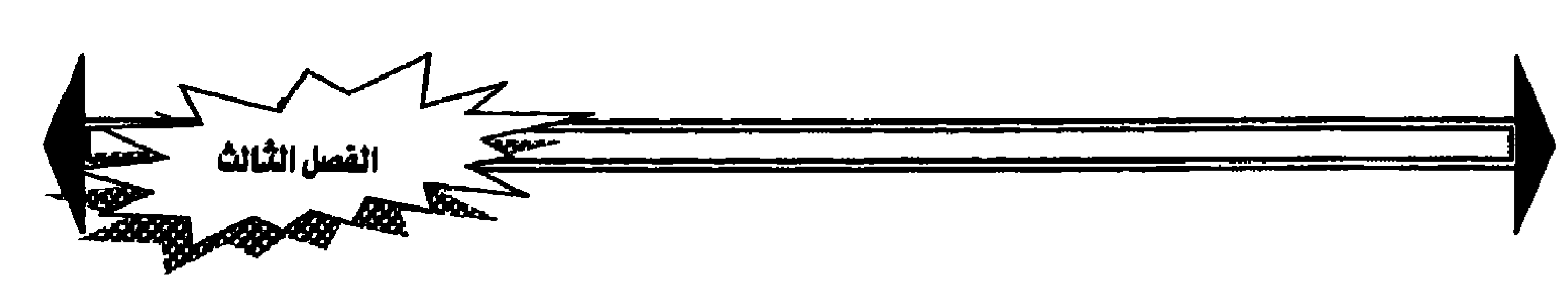
ولهذا فإنه توجد أعداد صحيحة ن$_{1}^{(1)}$، ن$_{2}^{(1)}$ حيث أ$_{ك}$ = ٠ لكل ك $\leq$ ن$_{1}^{(1)}$

ب$_{ل}$ = ٠ لكل ل $\leq$ ن$_{2}^{(1)}$

هنا يمكن بسهولة ملاحظة أن أ$_{ن}$ + ب$_{ن}$ = ٠ لكل ن $\leq$ أقصى (ن$_{1}^{(1)}$، ن$_{2}^{(1)}$) وكذلك $\sum_{ي+ر=ن}$ أ$_{ي}$ ب$_{ر}$ = ٠

لكل ن $\leq$ ن$_{1}^{(1)}$ + ن$_{1}^{(1)}$ $-$١ إذن ق + ل، ق . ل $\in$ ب[س]

ومن ناحية أخرى يمكن بسهولة إثبات أن عملية الجمع هذه تبديلية وتنسيقية وذلك لأن ح حلقة.



كـــذلك نلاحـــظ أن الحدوديـــة الـــصفرية ق.(س) = ٠ + (٠)س+ (٠)س^{٢}+.....

هي العنصر المحايد بالنسبة للجمع في ح[س].

لكل ق(س) ∋ ح[س] فإن – ق(س) هو المعكوس الجمعي.

وبذلك فإن (ح[س]، +) زمرة تبديلية.

وفي النهاية نلاحظ أن عملية الضرب تنسيقية وتقبـل التوزيـع علـى الجمـع. إذن (ح[س]، +، ٠) حلقة.

ملاحظات:

إذا كانت ح حلقة تبديلية، فإن ح[س] حلقة تبديلية.

إذا كانت ح تحتوي على العنصر المحايد، فإن الحدوديـة ق(س)= ١+ (٠)س + (٠)س^{٢}+ ... هي العنصر المحايد في الحلقة ح[س].

إذا كانت ح منطقة صحيحة فإن ح[س] تكون منطقة صحيحة.

مبرهنة مساعدة: إذا كانت ح حلقة وكانت ق(س)، ل(س) ∋ ح [س]. فإن درجة (ق(س) + ل(س)) ≤ أقصى (درجة ق(س)، درجة ل(س)).

البرهان: بفرض أن ق(س)= $أ_{٠}$ + $أ_{١}$س + ... + $أ_{ن}$س^{ن} ، ق(س)= $ب_{٠}$ + $ب_{١}$س + ... + $ب_{م}$س^{م}.

فإن ق(س) + ل(س) = $جـ_{٠}$ + $جـ_{١}$س + $جـ_{٢}$س^{٢}... + $جـ_{د}$س^{د} حيث $جـ_{ي}$ = $أ_{ي}$+$ب_{ي}$



إذا كان ن > م فإن: د= ن = أقصى (درجة ق(س)، درجة ل(س)).

إذا كـان ن = م و $أ_ن + ب_ن \neq ٠$ فـإن: د = م = أقـصى (درجـة ق(س)، درجة ل(س)).

إذا كان ن = م و $أ_ن + ب_ن = ٠$ فإن

د<ن = م = أقصى (درجة ق(س)، درجة ل(س)).

ومــن كــل ذلــك نلاحــظ درجــة (ق(س)+ ل(س)) = د ≥ أقــصى (درجة ق(س)، درجة ل(س)).

مبرهنة مساعدة: إذا كـان ح منطقـة صحيحة، وكانـت ق(س)، ل(س) ∋ ح[س] فإن

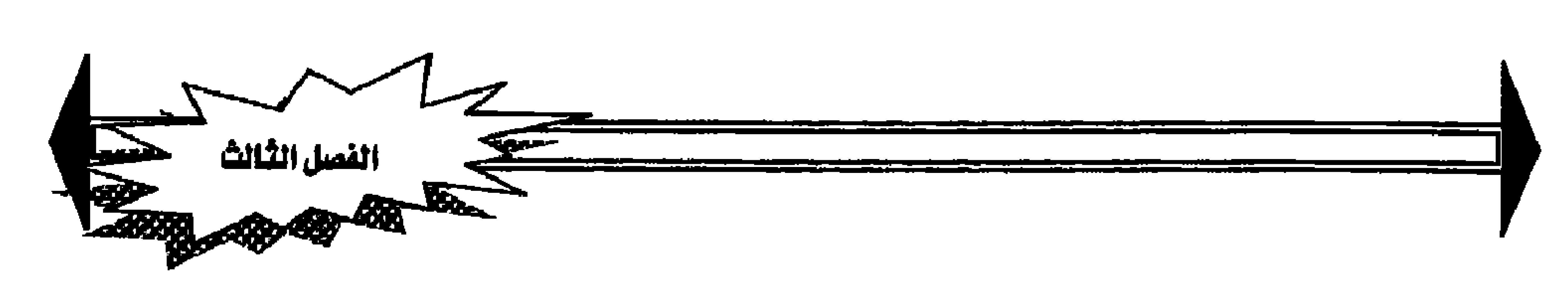
درجة (ق(س)، ل(س)) = درجة ق(س) + درجة ل(س)

البرهان: يترك كتمرين للقارئ.

على الرغم من أن حلقات الحـدوديات علـى درجـة عاليـة مـن الأهميـة ولكـن بعـض الخـواص والتطبيقـات المهمـة تظهـر في الحالـة الـتي تكـون فيهـا الحدوديات معرفة على مجال، أي الحدوديات ذات المعاملات من المجال.

مبرهنة: إذا كان ق مجال فإن العناصر القابلة للعكس في الحلقة $ق^{(١)}$[س] هي العناصر القابلة للعكس في المجال ق.

البرهان: إذا كان ٠ ≠ ق(س) ∋ $ق^{(١)}$[س] عنصراً قابل للعكس، فإنه يوجـد ٠ ≠ ل(س) ∋ $ق^{(١)}$[س]، بحيث ق(س) . ل(س)= ١



ومـن مبرهنـة سـابقة: درجـة (ق(س). ل(س)) = درجـة ق(س) + درجة ل(س)

ولكن درجة (ق(س). درجة ل(س)) = ٠

إذن درجة ق(س) + درجة ل(س)= ٠

أي أن درجة ق(س) = درجة ل(س) = ٠ إذن ق(س)، ل(س) ∋ ق

تعريف:

بفرض أن ق(س) ∋ ق$^{(1)}$[س] حيث ق(س)= $أ_٠$ + $أ_١$س + $أ_٢$س^{٢}... + $أ_ن$س^{ن}، $أ_ن$ ≠ ٠، فإنه يقـال عـن العنـصر $أ_ن$ أنـه المعامـل القائـد (leading coefficient) للحدودية ق(س). ويقال عن $أ_٠$ بالحد الثابت للحدودية.

ملاحظة: إذا كان $أ_ن$=١ (١ المحايد في المجال ق)، فإن الحدوديـة ق(س) في هـذه الحالة تسمى حدودية واحدية.

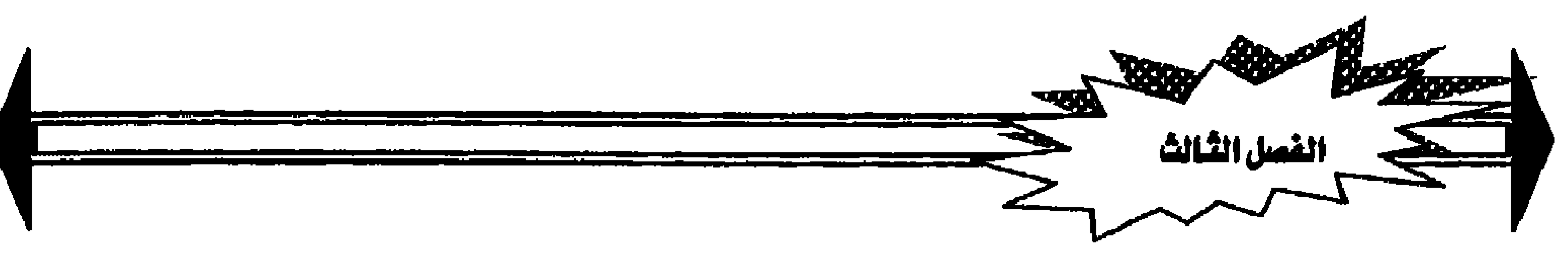
الآن نعطي برهان الخوارزمية القسمة في حالة الحدوديات.

مبرهنـة: لنفـرض أن ق مجـالاً وأن ب(س)، أ(س) ∋ ق$^{(1)}$[س] حيـث أ(س)= $أ_٠$ + $أ_١$س + ... + $أ_ن$س^{ن}، $أ_ن$ ≠ ٠، توجـد حـدوديتين وحيدتين هـ(س)، ر(س) ∋ ق$^{(1)}$[س]. بحيث أن:

ب(س)= هـ(س) أ(س) + ر(س)............................... (*)

حيث ر(س)= ٠ أو درجة ر(س) < درجة أ(س)





البرهان: لنفرض أن م= {ب(س) – γ (س) ﺃ(س): γ(س) ∈ θ [(1)][س]}

نلاحظ أن م ≠ Φ لأن ب(س) ∈ م

إذا كانت الحدودية الصفرية تنتمي إلى م، فإنه توجد حدودية γ(س) بحيث ب(س) – γ(س) ﺃ(س)= ٠

أي أن ب(س) = γ(س) ﺃ(س) بوضع γ(س) = هـ(س)، ر(س)= ٠.

نحصل على العلاقة (*).

بفرض أن ٠∉م. هذا يعني أن أي حدودية في م تكون درجتها ≤ ٠، نختار حدودية ر(س) في م تكون درجتها أقل ما يمكن، لهذا فإنه توجد حدودية هـ(س) ∈ ق[(1)][س] حيث ب(س) – ﺃ(س) هـ(س)= ر(س) أي أن ب(س) = ﺃ(س) هـ(س) + ر(س) بما أن $ﺃ_ن$ ≠ ٠ فإن درجة (ﺃ(س))= ن

نفرض أن درجة ر(س) = م ≤ ن، ولتكن

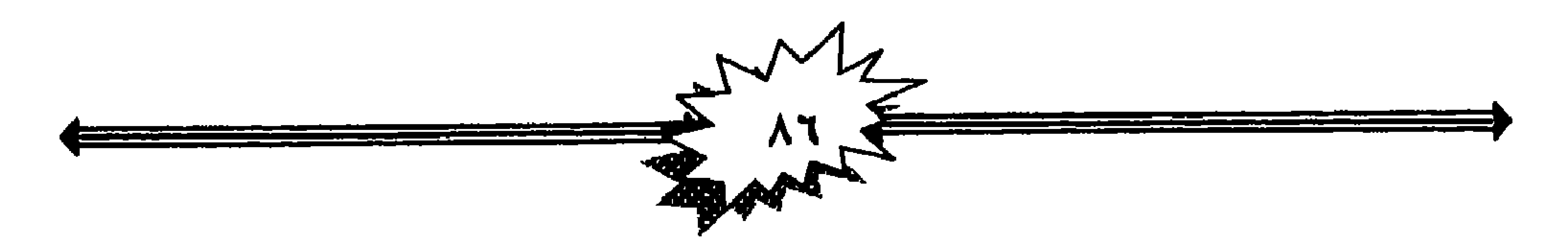
$$ر(س) = ر_م س^م + ر_{م-1} س^{م-1} + \ldots + ر$$

بما أن $\frac{ر_م}{ﺃ_ن} س^{م-ن} ﺃ(س) = ر_م س^م + \frac{ر_م}{ﺃ_ن} ﺃ_{ن-1} س^{م-1} + \ldots + \frac{ر_م}{ﺃ_م} ﺃ_. س^{م-ن}$

لهذا فإن ((س)= $\frac{ر_م}{ﺃ_ن} س^{م-ن} ﺃ(س) + ل(س)$، حيث

$ل(س) = -\frac{ر_م}{ﺃ_ن} ﺃ_{ن-1} س^{م-1} - \ldots - \frac{ر_م}{ﺃ_ن} ﺃ_. س^{م-ن} + ر_{م-1} س^{م-1} + \ldots + ر$ أي أن ل(س) ∈ م

ولكن درجة ل(س) ≥ درجة ر(س) وهذا يتناقض مع طريقة اختيار الحدودية ر(س) إذن



درجة ر(س) < درجة ﻡ(س) أي يمكن إيجاد ﻡ(س)، هــ(س) ∋ ق[س] بحيث

ب(س) = ﻡ(س) هـ (س) + ر(س)

درجة ر(س) < درجة ﻡ(س)

لإثبات الوحدانية نفرض أن ب(س) = هـ(س) ﻡ(س) + ر(س) = هـ$_1$(س) ﻡ(س) + ر$_1$(س)

حيث درجة ر(س) < درجة ﻡ(س) و درجة ر$_1$(س) < درجة ﻡ$_1$(س)

إذن [هـ(س) − هـ$_1$(س)] ﻡ(س)= ر$_1$(س) − ر(س) الآن درجة [ر$_1$(س) − ر(س)] < درجة ﻡ(س)

ولكن درجة ([هـ(س) − هـ$_1$(س)] ﻡ(س)) ≤ درجة ﻡ(س)

وهذا لا يجوز إلا إذا كان هـ(س) − هـ$_1$(س)= ٠ و ر$_1$(س) − ر(س)= ٠

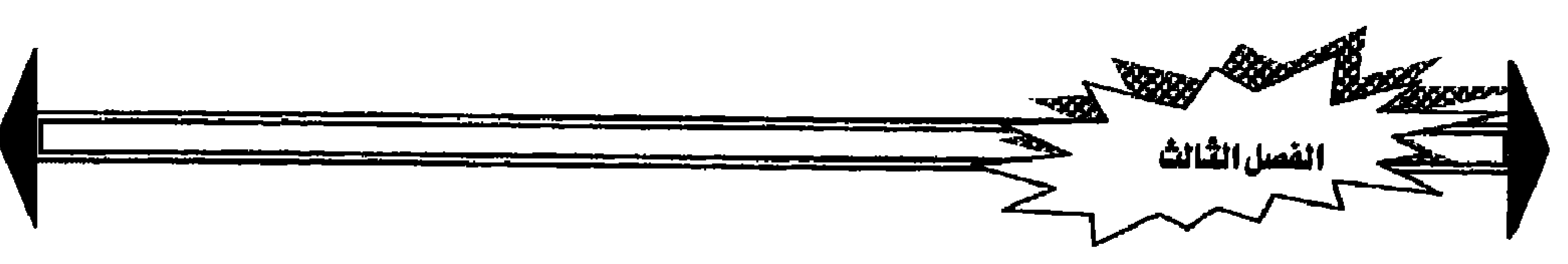
وبالتالي يكون هـ(س) = هـ$_1$(س) ، ر$_1$(س) = ر(س)

أي أن ر(س)، هـ(س) اللذان يحققان العلاقة (*) وحيدان.

تعريف: ليكن ق مجال ق(س)، ل(س) ∋ ق$^{(1)}$[س] يقال أن ق(س) تقسم الحدودية ل(س) إذا وجدت حدودية هـ(س) ∋ق[س] بحيث ل(س)=ق(س) هـ(س) ويكتب ذلك هكذا ق(س)/ ل(س).

تعريف: إذا كان ق(س) ∋ ق$^{(1)}$(س) و ق مجال وكان درجة ق(س) ≤ ١.

فإن الحدودية ق(س) يقال لها غير قابلة للاختزال (irreducible) إذا كان



لكل هـ(س) ∋ ق$^{(1)}$[س] حيث هـ(س)/ ق(س) فإنه إما هـ(س)= جـ أو هـ(س)= جـ ق(س) حيث جـ ∋ ق

مبرهنة: إذا كان ق مجالاً، فإن ق$^{(1)}$[س] تكون منطقة صحيحة للمثاليات الرئيسة.

البرهان:

بفرض أن (و) مثالية في ق$^{(1)}$[س]، و ≠ {٠}، وليكن ٠ ≠ ق(س) حدودية ذات درجة أقل ما يمكن في و. لأي حدودية ل(س) ∋ و فإنه من المبرهنة السابقة يوجد ر(س)، هـ(س) ∋ ق$^{(1)}$[س] بحيث ل(س)= ق(س) هـ(س) + ر(س) حيث ر(س)= ٠ أو درجة ر(س) < درجة ق(س)

بما أن ق(س) ∋ و ، ل(س) ∋ و فإن

ر(س) = ل(س) – ق(س) هـ(س) ∋ و

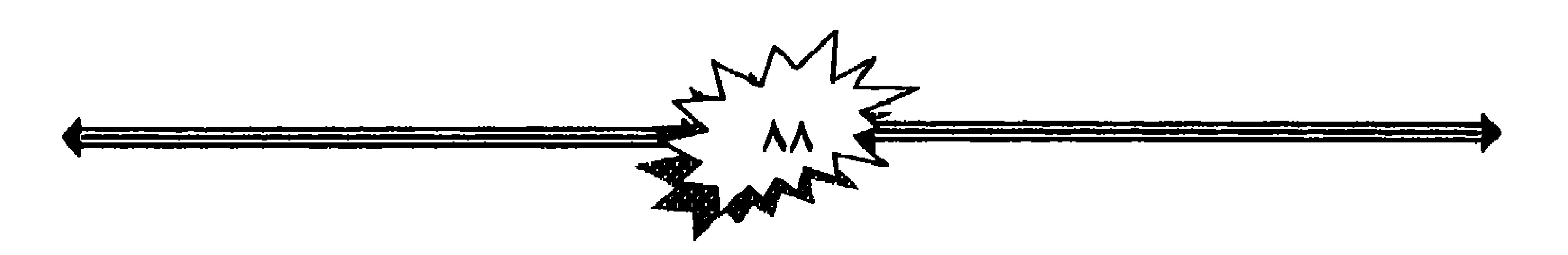
وحيث أن ق(س) حدودية ذات أقل درجة ممكنة في و لهذا فإن ر(س)= ٠ أي أن ل(س)= ق(س) هـ(س)

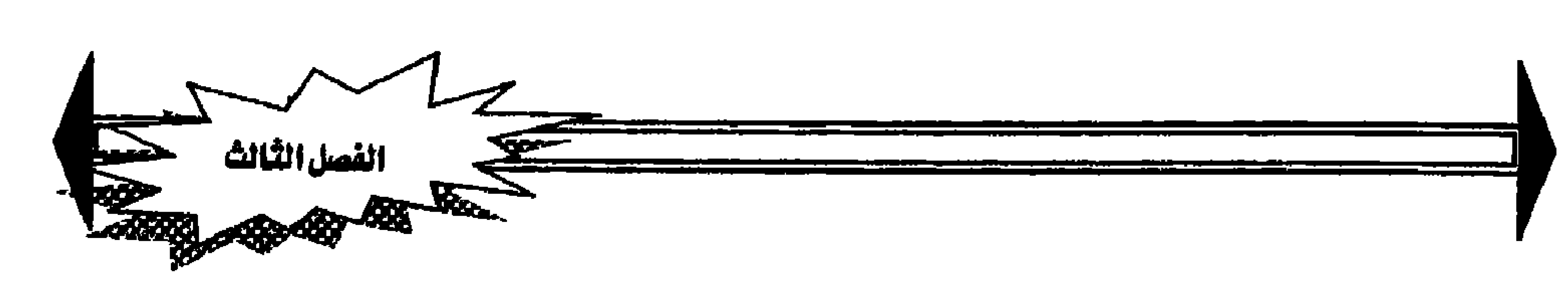
أي أن (و) مثالية رئيسة مولده بواسطة ق(س)

أي أن كل مثالية مختلفة عن الصفر هي مثالية رئيسة في ق$^{(1)}$[س] إذن ق[س] منطقة صحيحة للمثاليات الرئيسة.

تعريف: لتكن ع حلقة و ح حلقة جزئية من ع لكل جـ ∋ ع ولأي حدودية

ق(س)= أ$_٠$ + أ$_١$س + أ$_٢$س^٢... + أ$_ن$س^ن، في ح [س]





فإن ق(س)= $أ_٠ + أ_١جـ + أ_٢جـ^٢ ... + أ_نجـ^ن$

هو عنصر الحلقة ع ويسمى بقيمة الحدودية ق(س) عند النقطة س= جـ

ملاحظة: يسمى العنصر أ ∈ ع جذراً للحدودية ق(س) إذا كان ق(أ)= ٠

مبرهنة: ليكن ق مجال و ق(س) ∈ ق$^{(١)}$[س] يفرض أن م ∈ ق، و ر(س)، هـ(س) حدوديتين وحيدتين في الحلقة ق$^{(١)}$[س] بحيث كان ق(س)= هـ(س) (س−م) + ر(س) و درجة ر(س) > درجة (س−م) فإن ر(س) = د حيث د ∈ ق، علاوة على ذلك ق(م)= د.

البرهان: بما أن درجة (س−م)= ١

فإن درجة ر(س)= ٠ أو ر(س) = ٠ إذا كان ر(س) = ٠ فإن ٠ ∈ ق أي أن د= ٠

ق(م) = هـ(م) (م−م) = ٠ = د

إذا كان درجة ر(س) = ٠ ، فإن ر(س) = جـ ≠ ٠ حيث جـ ∈ ق

بما أن ق(س)= هـ(س) (س−م) + ر(س)

ق(م)= هـ(م) (م−م) + ر(م)

= هـ(م) (٠) + ر(م) = ر(م) = جـ

نتيجة:

إذا كان ق مجال وكان ق(س) ∈ ق$^{(١)}$[س] فإن م ∈ ق$^{(١)}$ يكون جذر للحدودية ق(س) إذا وإذا كان فقط (س−م) يقسم ق(س)



البرهان: إذا كان م ∋ ق جذر للحدودية ق(س)، فإن ق(م)= ٠

ولكن ق(س) = هـ (س) (س−م) + ر(س)

إذن من المبرهنة السابقة فإن ر(س) = ق(س)= ٠

لهذا فإن ق(س)= هـ(س) (س−م)

أي أن (س−م) يقسم ق(س)

وفي المقابل إذا كان (س−م)/ ق(س)، فإنه يوجد هـ(س) ∋ ق$^{(1)}$[س]

بحيث ق(س) = هـ(س) (س−م) أي أن ق(م)= هـ(م) (م−م) = هـ(م) (٠) = ٠

ولهذا فإن م يكون جذر للحدودية ق(س).

مبرهنة: ليكن ق مجال، ق(س) ∋ ق$^{(1)}$[س]، فإذا كانت درجة ق(س) = ن ≤٠، فإن الحدودية ق يكون لها على الأكثر ن من الجذور المختلفة.

البرهان:

إذا كانت ن= ٠ فإننا لا نحتاج إلى إثبات، ولهذا يجب أن تكون ن>٠.

بفرض أن ق لها (ن+١) من الجذور المختلفة، أي أن أ$_{1}$، أ$_{2}$، ... ، أ$_{ن+1}$ جذور مختلفة للحدودية ق.

وعليه فإن ق(أ$_{1}$)= ٠.

إذن باستخدام المبرهنة السابقة فإن ق= (س− أ$_{1}$) ق$_{1}$ لبعض ق$_{1}$ ∋ ق$^{(1)}$[س].

ق(أ$_٢$)= (أ$_٢$ − أ$_١$) ق$_١$ (أ$_٢$)

أي أن (أ$_٢$ − أ$_١$) ق$_١$ (أ$_٢$)= ٠ إذن ق$_١$(أ$_٢$)= ٠

مرة أخرى باستخدام المبرهنة السابقة فإن ق$_١$= (س− أ$_٢$) ق$_٢$ لبعض ق$_٢$ ∈ ق$^{(١)}$[س].

وبالتالي فإن ق= (س− أ$_١$) (س− أ$_٢$) ق$_٢$.

وبالاستمرار على هذا المنوال نصل إلى أن ق= (س− أ$_١$) (س− أ$_٢$) (س− أ$_٣$) ... (س− أ$_{ن+١}$) ق$_{ن+١}$

نلاحظ هنا أن الحدودية (س− أ$_١$) (س− أ$_٢$) (س− أ$_٣$) ... (س− أ$_{ن+١}$) درجتها $_{ن+١}$ ولكن هذا يعني أن درجة ق تكون ≤ ن+١

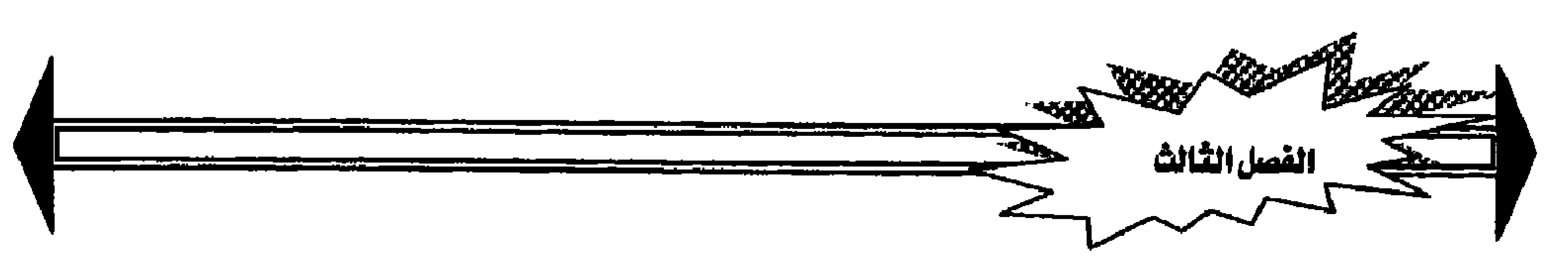
ولكن هذا تناقض لأن درجة ن = ق ∴ إذن ق يكون لها على الأكثر ن من الجذور

مبرهنة:

إذا كان ق مجال، فالمثالية <ب(س)> ≠ ٠ في الحلقة ق$^{(١)}$[س] تكون مثالية عظمى إذا وإذا كان فقط ب(س) غير قابلة للاختزال على المجال ق.

البرهان:

بفرض أن <ب(س)> مثالية عظمى في الحلقة ق$^{(١)}$[س]، فإن <ب(س)> ≠ ق$^{(١)}$[س] وعليه فإن ب(س) ∈ ق إذا كانت ب(س) = ق(س) ل(س) أي أن ق(س)، ل(س) عوامل للحدودية ب(س) في ق$^{(١)}$[س] وحيث أن <ب(س)> مثالية عظمى، إحدى المبرهنات السابقة تضمن أن <ب(س)>



مثالية أولية، وحيث أن ق(س) ل(س) ∋ <ب(س)> فإن هذا يؤدي إلى أن ق(س) ∋ <ب(س)> أو ل(س) ∋ <ب(س)>.

وهذا يعني أن ب(س) تكون عامل الحدودية ق(س) أو الحدودية ل(س). ولكن لا يمكن أن تكون درجات ق(س)، ل(س) أقل من درجة ب(س). وهذا يثبت أن ب(س) غير قابلة للاختزال.

العكس: إذا كانت ب(س) غير قابلة للاختزال على المجال ق، نفرض أن ن مثالية في ق$^{(1)}$[س] حيث <ب(س)> ≤ ن ∋ ق[س]

من المبرهنة السابقة ن تكون مثالية رئيسة، ولهذا فإن ن = <ق(س)>، ق(س) ∋ ق$^{(1)}$[س]

ومن ذلك نلاحظ أن ب(س)= ق(س) هـ(س) لبعض هـ(س) ∋ ق$^{(1)}$[س]

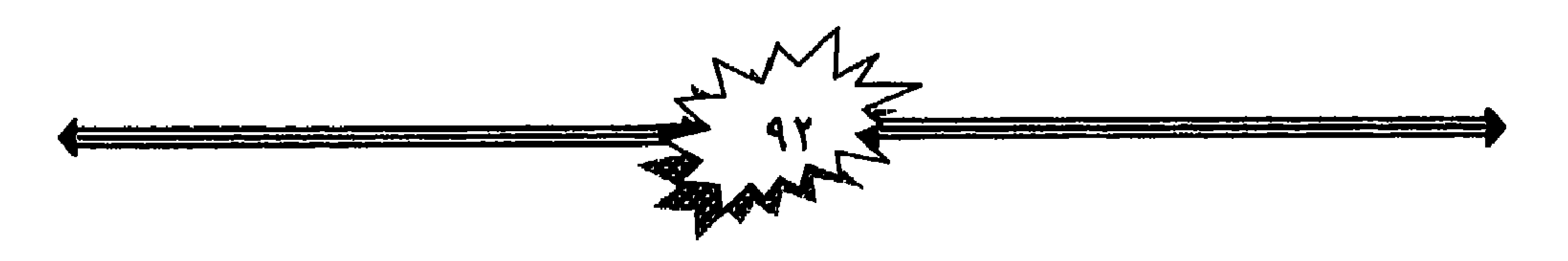
ولكن ب(س) غير قابلة للاختزال، فهذا يؤدي إلى أن درجة ل(س)= ٠ أو درجة ق(س)= ٠

اي أن ل(س)= جـ أو ق(س)= جـ حيث ٠ ≠ جـ ∋ ق

إذا كانت ق(س)= جـ فإن هذا يعني أن ق(س) تكون قابلة للعكس وبالتالي ن= <ق(س)>= ق[س]

إذا كانت ل(س)= جـ فإن ق(س)= $\frac{1}{جـ}$ب(س) وهذا يعني أن ق(س) ∋ <ب(س)>

ولهذا فإن ن= <ب(س)>



ومن كل ذلك يتبين أن <ب(س)> ⊂ ن ⊂ ق[س] مستحيل، وعليه فإن <ب(س)> مثالية عظمى.

نختم هذا البند بالأمثلة الآتية:

مثال (١):

الحدودية ق(س)= س^{٣} + ٣س + ٢ في الحلقة طه[س] تكون غير قابلة للاختزال. وذلك لأنه إذا كانت قابلة للاختزال على المجال طه، هذا يعني أن أحد العوامل يكون على صورة س−م حيث م ∈ طه

ومن النتيجة (١) في هذا البند ق(م)= ٠

ولكن ق(٠)= ٢، ق(١)= ق(٢)= ١، ق(٤)= ق(٣)= ٣

ولهذا فإن ق(س) ليس لها جذر في المجال طه.

إذن ق(س) تكون غير قابلة للاختزال على المجال طه.

ومن المبرهنة السابقة فإن <س^{٣} + ٣س + ٢> مثالية عظمى.

ومن مبرهنة سابقة فإن طه[س]/ <س^{٣} + ٣س + ٢> يكون مجال

مثال (٢):

الحدودية س^{٢}−٢ تكون غير قابلة للاختزال في الحلقة ك[س] أي لا يوجد لها جذور في المجال ك.

ولكن هذه الحدودية تكون قابلة للاختزال في الحلقة ح[س] أي لها جذور في المجال ح، س^{٢}−٢=(س − $\sqrt{٢}$)(س + $\sqrt{٢}$) هذا نلاحظ أن ك(س)/ <س^{٢}−٢> مجال.

تعريف:

لكين ع فضاء اتجاهي على المجال ق. يقال عن المتجهات ع$_1$، ع$_2$، ... ، ع$_ن$ أنها مرتبطة خطياً إذا كان هناك مقادير λ_1، λ_2، λ_3، ... ، $\lambda_ن \in$ ق، ليست جميعها أصفار بحيث λ_1ع$_1$ + λ_2ع$_2$ + ... $\lambda_ن$ع$_ن$= ٠، وتكون المتجهات ع$_1$، ع$_2$، ... ، ع$_ن$ مستقلة خطياً إذا كان λ_1ع$_1$ + λ_2ع$_2$ + ... $\lambda_ن$ع$_ن$= ٠.

فإن λ_1= λ_2 = ... = $\lambda_ن$ = ٠

مثال:

في الفضاح ح^2 على المجال ح، المتجهات (١، ٠)، (٠، ١) مستقلة خطياً ولكن المتجهات ت($\sqrt{2}$،١)،(٢، $\sqrt{2}$) مرتبطة خطياً.

تعريف: المجموعة { ع$_1$، ع$_2$، ... ، ع$_ن$} يقال أنها أساس للفضاء ع إذا تحقق الآتي:

١) المتجهات ع$_1$، ع$_2$، ... ، ع$_ن$ تواعد الفضاء ع.

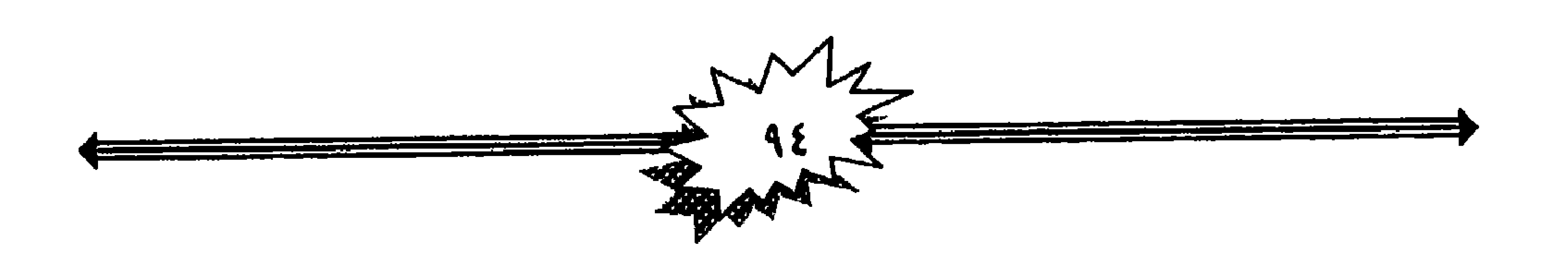
٢) المتجهات ع$_1$، ع$_2$، ... ، ع$_ن$ مستقلة خطياً.

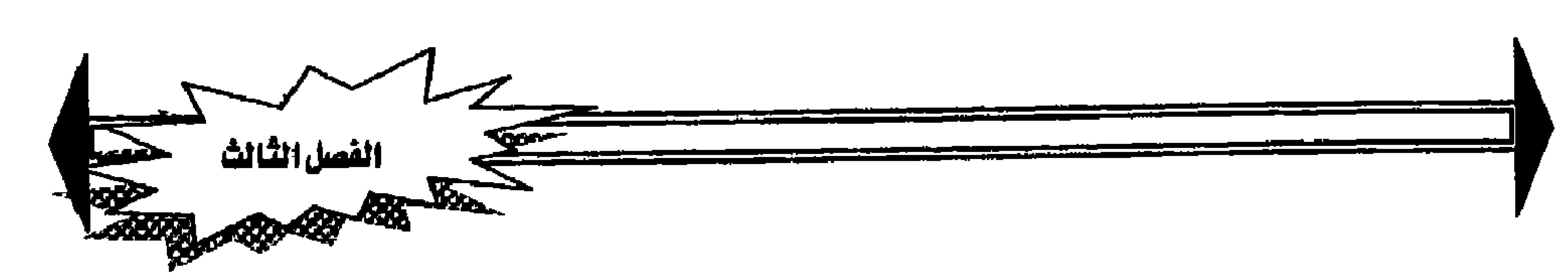
ملاحظة: بعد الفضاء ع هو عبارة عن عدد متجهات الأساس ويرمز متجه ع.

مبرهنة: إذا كان ق مجال جزئ من مجال ل فإن ل قضاء اتجاهي على المجال ق.

البرهان: يترك كتمرين.

تعريف: إذا كان ق مجالاً جزئياً من المجال ل. يسمى بعد الفضاء الاتجاهي ل على المجال ق بدرجة المجال ق ويرمز لها بالرمز [ل: ق].





تعريف: إذا كان ق مجال جزئي من المجال ل، يقال في هذه الحالة أن المجال ل توسيع للمجال ق.

ملاحظات:

١) يسمى العدد [ل: ق] درجة توسيع المجال ل بالنسبة للمجال ق.

٢) إذا كان [ل: ق] $< \infty$ يقال أن المجال ل هو توسيع منتهي للمجال ق. وإذا كان غير ذلك يقال أن التوسيع غير منتهي.

مثال: مجموعة الأعداد الحقيقية ح مجال جزئي من الأعداد المركبة ج، ولهذا فإن ج تكون فضاء اتجاهي على المجال ح.

أساس الفضاء الاتجاهي ج على المجال ح هو {١، ي}.

يقال عن المجال ج أنه توسيع للمجال ح ودرجة التوسيع ٢ أي أن [ج: ح]=٢.

المبرهنة القادمة مهمة حيث تلعب دور مشابهة للدور الذي تلعبه نظرية لاجرانج في نظرية الزمر.

إضافة إلى ذلك أنه يمكن إعطاء برهان يعتمد فقط على بعض المفاهيم البسيطة من الجبر الخطي التي سبق التعرض لها في بداية هذا البند.

مبرهنة: إذا كان ق، ل، م مجالات بحيث ق $\subset$ ل $\subset$ م، فإذا كان [ل: ق]= ر، [م: ل] = س فإن [م: ق] = رس

البرهان:

بفرض أن $ع_١، ع_٢، \dots ، ع_ن$ أساس للمجال ل بالنسبة للمجال ق و $هـ_١، هـ_٢، \dots ، هـ_س$ أساس للمجال م بالنسبة للمجال ل إذا وجد $جـ_{ي ر} \in$ ق بحيث $\sum_{ي=١}^{س} \sum_{ر=١}^{ن}$ فإن:

$$\sum_{ي=١}^{س} \left(\sum_{ر=١}^{ن} (جـ_{ي ر} \, ع_ي) هـ_ر \right) = ٠$$

ولكن لكل $١ \leq ر \leq س$ فإن $\sum_{ي=١}^{ن} جـ_{ي ر} \, هـ_ي \in ق$

كذلك المتجهات $هـ_١، هـ_٢، \dots ، هـ_س$ أساس للمجال م بالنسبة للمجال ل، ولهذا فإن هذه المتجهات تكون مستقلة خطياً، وهذا يؤدي إلى أن:

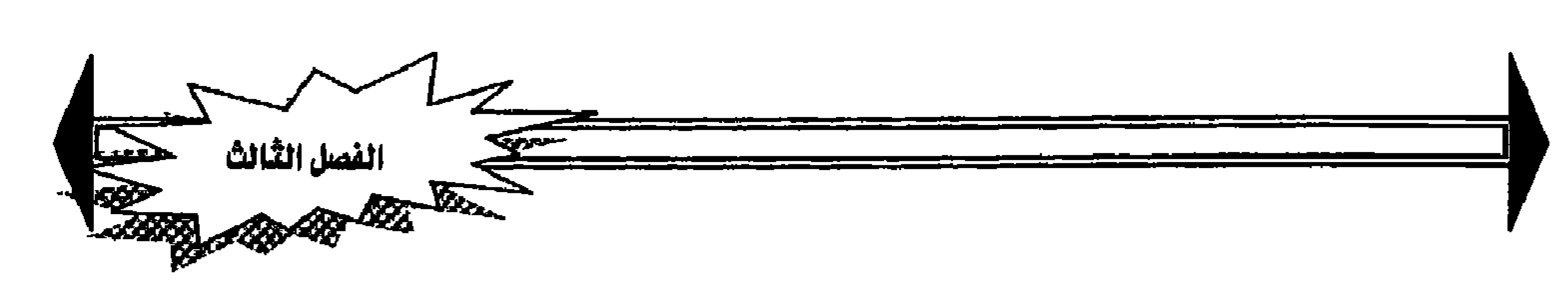
$$\sum_{ي=١}^{ن} جـ_{ي ر} \, ع_ي = ٠ \qquad \text{لكل } ١ \leq ي \leq س$$

وبما أن $ع_١، \dots ، ع_ن$ أساس للمجال ل بالنسبة للمجال ق فإن $ع_١، \dots ، ع_ن$ تكون مستقلة خطياً نلاحظ أن $جـ_{ي ر} \in$ ق لكل $١ \leq ي \leq ن$، فإن $جـ_{ي ر} = ٠$ لكل $١ \leq ي \leq ن$ ولكل $جـ_{ي ر} = ٠$ وهذا يثبت أن المجموعة $\{ع_ي هـ\}$ مستقلة خطياً.

بقي إثبات أنها تولد الفضاء الاتجاهي م بالنسبة للمجال ق.

لكل س $\in$ م، وبما أن $هـ_١، \dots ، هـ_س$ أساس للمجال م بالنسبة للمجال ل فإنه توجد $جـ_١، جـ_٢، \dots ، جـ_س \in$ ل

بحيث $س = جـ_١ هـ_١ + جـ_٢ هـ_٢ + \dots جـ_س هـ_س$ .... (١)



ومن ناحية أخرى لكل جـر ∈ ل، ١ ≤ ي ≤ س فإنه توجد دي ر ∈ ق ١ ≤ ي ≤ ن بحيث:

جر= دي ر ك + د٢ر ع٢ + ... دن ر عن .... (٢)

وذلك لأن ع١، ... ، عن أساس للمجال ل بالنسبة للمجال ق.

من (١) و (٢) نستنتج أن:

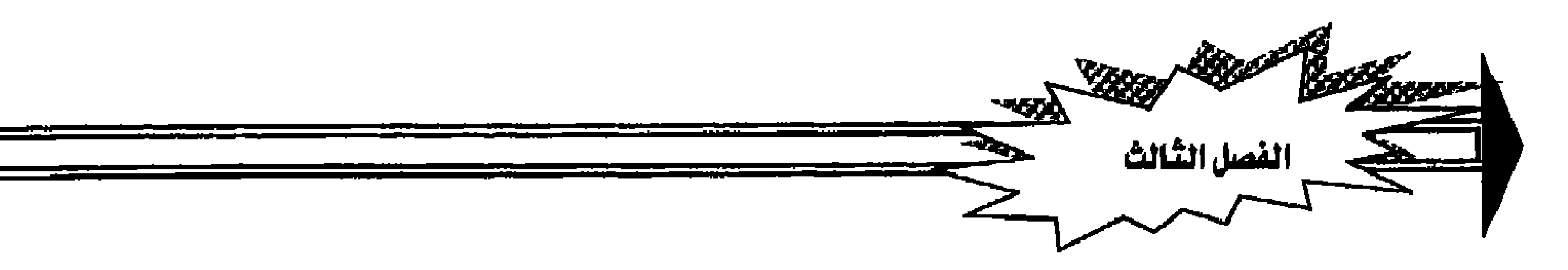
$$س = \sum_{ر=١}^{س} \sum_{ي=١}^{ن} د_{ير} ع_ي هـ_ر$$

ولهذا فإن المجموعة {عي هـر} حيث ١ ≤ ي ≤ ن، ١ ≤ ر ≤ س تكون أساس للفضاء الاتجاهي م بالنسبة للمجال ق، ولكن هذه المجموعة تحوي ن، س من العناصر، عليه فإن [م: ق] = ن. س

نتيجة: إذا كان ك٠، ك١، .... ، كن مجالات بحيث ك٠ ⊃ ك١ ⊃ ... ⊃ كن فإذا كان [كي: كي-١]= ني، ي= ١ ، ... ن، فإن [كن: ك٠] = ر١، ر٢، ....، رن

تعريف: إذا كان ل توسيعاً للمجال ق يقال أن العنصر أ ∈ ل هو عنصر جبري (algabriac number) بالنسبة للمجال ق، إذا وجدت حدودية ٠ ≠ ق(س) ∈ ق(١)[س] بحيث ق(أ)= ٠، أي أنه توجد حدودية غير صفرية في ق(١)[س] يكون أ جذر لها.





ملاحظات:

١) إذا لم توجد حدودية غير صفرية في ق[١][س] بحيث يكون ﻫ جذر لها، فإنه يقال أن ﻫ عنصر غير جبري.

٢) يقال أن المجال ل توسيع جبري (algebraic extension) للمجال ق إذا كان ق ⊂ ل وكل عنصر ﻫ ∋ ل هو جبري بالنسبة للمجال ق.

٣) يرمز لأصغر مجال جزئي من المجال ل والذي يحوي المجال الجزئي ق والعنصر ﻫ ∋ ل بالرزق (ﻫ) وهو عبارة عن تقاطع جميع المجالات الجزئية من ل والتي تحوي ق و ﻫ. ويقال أن المجال ق(ﻫ) ناتج من المجال ق بإضافة ﻫ.

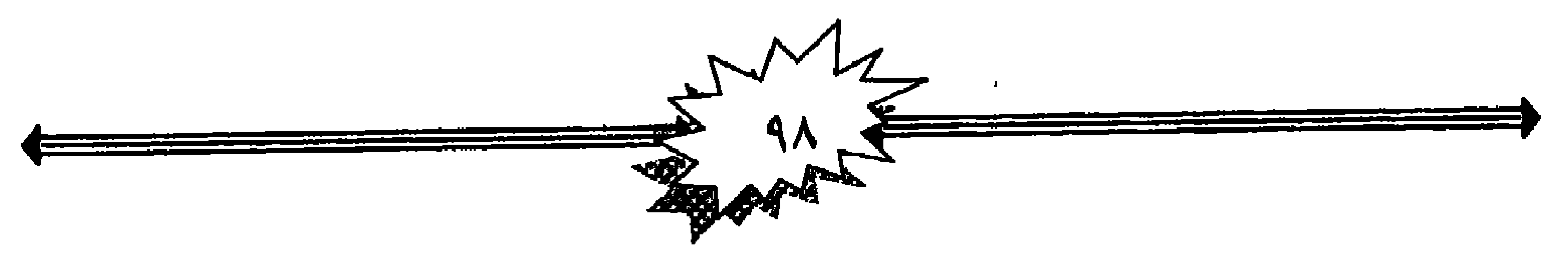
مبرهنة: إذا كان ل توسيعاً للمجال ق و ﻫ ∋ ل عنصراً جبرياً بالنسبة للمجال ق، فإنه توجد حدودية غير قابلة للتحليل ق(س) ∋ ق[١][س] ذي درجة أكبر من الصفر وبحيث ق(ﻫ)= ٠، وإذا كان ك(س) ∋ ق[١][س] بحيث ك(ﻫ)= ٠، فإن ق(س)/ ك(س).

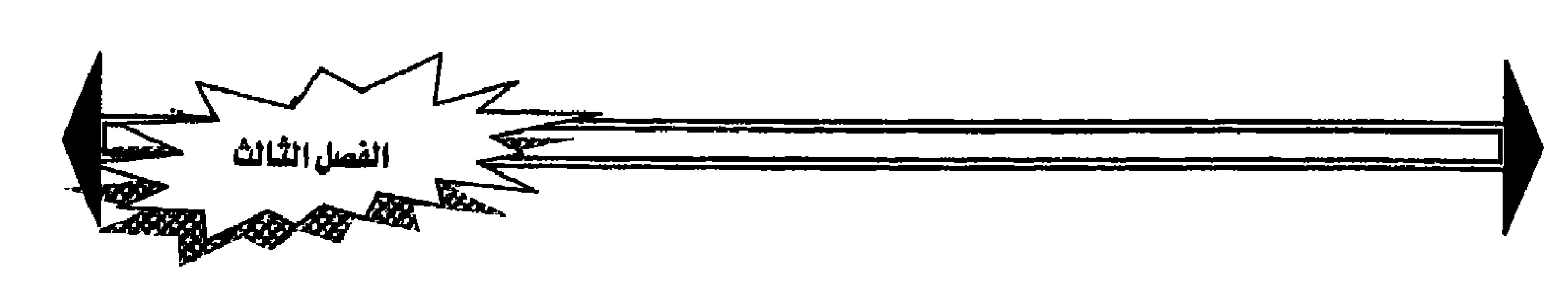
البرهان:

بما أن ﻫ عنصر جبري بالنسبة للمجال ق، هذا يعني أنه توجد حدودية ٠≠ هـ(س) ∋ ق[١][س] بحيث هـ (ﻫ)= ٠، من هذا نستنتج أن درجة هـ(س) أكبر من الصفر.

إذا كانت هـ(س) غير قابلة للتحليل، فإن هـ(س) تفي بكل شروط المبرهنة.

أما إذا كانت هـ(س) قابلة للتحليل، فإن هـ(س)= $ق_١$(س) . $ق_٢$(س) ... $ق_ن$ (س)





حيث $ق_ي$(س) غير قابلة للتحليل ي= ١، .... ن.

وحيث هـ(م)= ٠ فإن $ق_١$(م) . $ق_٢$(م) ... $ق_ن$(م)= ٠

وحيث أن ق[(١)][س] منطقة صحيحة، فإنه يوجد ١ ≤ ي ≤ ن بحيث $ق_ي$(م)= ٠، وعليه فإن $ق_ي$(س) تحقق شروط المبرهنة.

لنفرض أن ٠ ≠ ك(س) ∈ ق[س] بحيث ك(م)= ٠.

نفرض أن (ق(س). ك(س))= د(س). بما أن ق(س) غير قابلة للتحليل و د(س)/ ق(س) فإن هذا يعني أن د(س)= ١ أو د(س)= ق(س).

وحيث أن (ق(س). ك(س))= د(س) فإنه يوجد ر(س) . ش(س) بحيث

د(س)= ق(س) ر(س) + ك(س) ش(س) وعليه فإن

د(م)= ق(م) ر(م) + ك(م) ش(م) = (٠) . ر(م) + (٠) ش(م)= ٠

أي أن م جذر للحدودية د(س)، إذن دس ≠ ١

وبالتالي فإن د(س) = ق(س)، ولكن د(س)/ ك(س) فإن:

ق(س)/ ك(س)

تعريف: إذا كان ل توسيع للمجال ق، م ∈ ل عنصراً جبرياً بالنسبة للمجال ق فإذا كانت ٠ ≠ ق(س) ∈ ق[(١)][س] حدودية غيرقابلة للتحليل وذات درجة أكبر من الصفر بحيث ق(م) = ٠ هنا يطلق على درجة الحدودية ق(س) درجة العنصر م بالنسبة للمجال ق.





ملاحظة: إذا كان $ق_1(س)$، $ق_2(س)$ حدوديتين غير قابلتين للتحليل في $ق^{(1)}$[س] بحيث $ق_2(م)= ق_1(م)= ٠$ فإنه من مبرهنة سابقة $ق_2(س)$/ $ق_1(س)$، $ق_1(س)$/ $ق_2(س)$ أي أنه يوجد جـ ∈ ق بحيث $ق_1(س)$ = جـ $ق_2(س)$.

مثال: $\sqrt{٢}$ عنصر درجته بالنسبة٢ للمجال Q ولكن...... تكون درجته ١ بالنسبة للمجال ح.

مثال: درجة العنصر $م=\sqrt{\sqrt{٥}+\sqrt{٢}}$ بالنسبة للمجال Q هي ٤ وذلك لأن ق(س)= $س^٤ - ١٠س^٢+٣٢$ ∈ Q[س] غير قابلة للتحليل في Q [س] و ق(م)= ٠

مبرهنة: ليكن المجال ل توسيعاً للمجال ق، فإذا كان م ∈ ل عنصراً جبرياً بالنسبة للمجال ق من الدرجة ن، فإن:

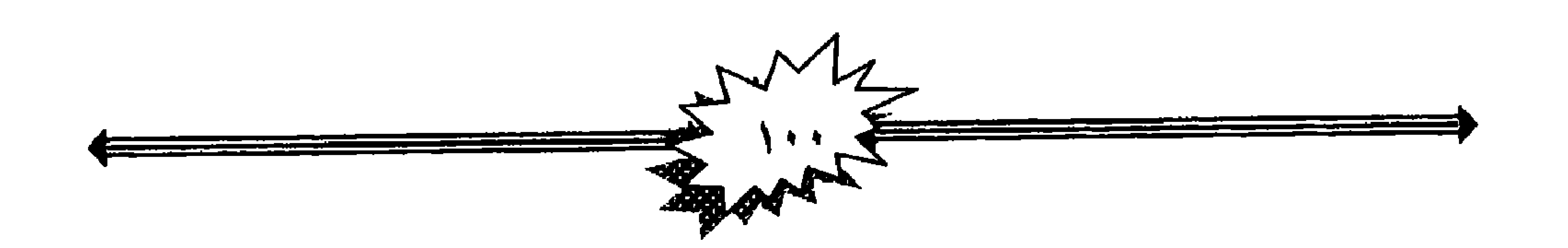
١- ق(م) هي مجموعة العناصر من الشكل $ب_٠+ ب_١م + ... + ب_{ن-١}م^{ن-١}$ حيث $ب_٠$، $ب_١$، ... $ب^{ن-١}$ ∈ ق.

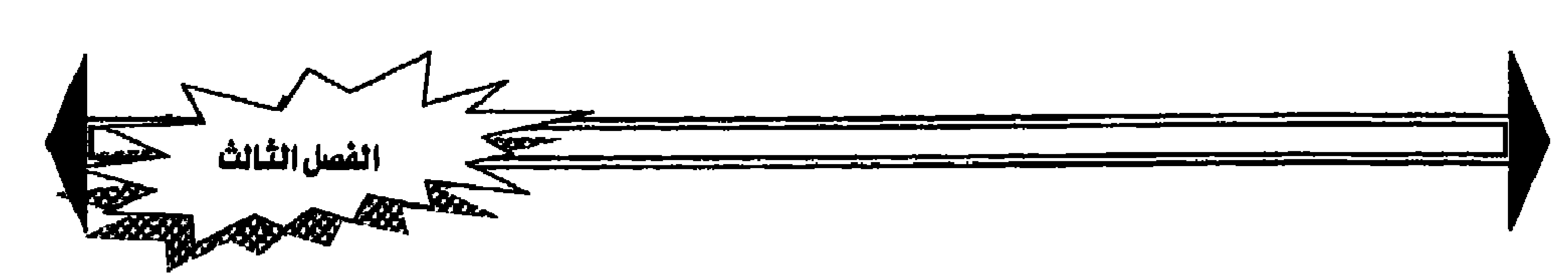
٢- أساس المجال ق(م) بالنسبة للمجال ق هي العناصر ١، م، $م^٢$، .... ، $م^{ن-١}$.

٣- [ق(م): ق] = ن.

البرهان:

١- إذا كان ن=١، فإ ق(م)= ق والمبرهنة صحيحة في هذه الحالة ليكن ن>١. وبفرض أن





م= {ك(أ): ك(أ)= ب. + ب١ أ+ ... + بن-١ أن-١، ب.، ...، بن-١ ∈ ق، ك(س) ∈ ق(١)[س] درجة ك(س)<ن}.

واضح أن م تحوي جميع الحدوديات من الدرجة صفر في ق(١)[س] وهذه المجموعة هي ق نفسها وعليه فإ جـ ≥ م

نلاحظ أن (م، +) زمرة تبديلية.

ولإثبات أن م مجال، يكفي إثبات أن (م/ {٠}، ٠) زمرة تبديلية لكل ك١(أ)، ك٢(أ) ∈ م/ {٠}

حيث ك٢(س)، ك١(س) ∈ ق(١)[س] ودرجة ك١(س)، درجة ك٢(س)<ن

إذا كان درجة (ك١(س) . ك٢(س))<ن فإن ك١(أ) ك٢(أ) ∈ م/ {٠}

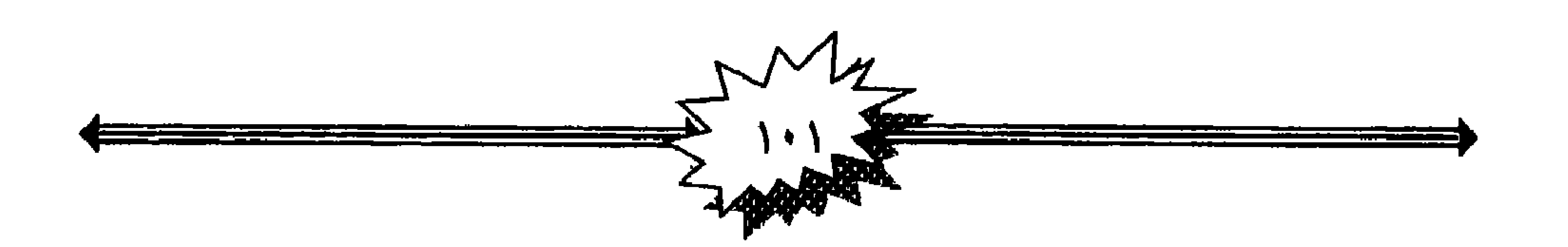
إذا كان درجة (ك١(س) . ك٢(س)) ≤ ن، وبما أن أ عنصر جبري من الدرجة ن، فإنه توجد حدودية ق(س) غير قابلة للتحليل في ق(١)[س] بحيث ق(أ)= ٠ ودرجة ق(س)= ن

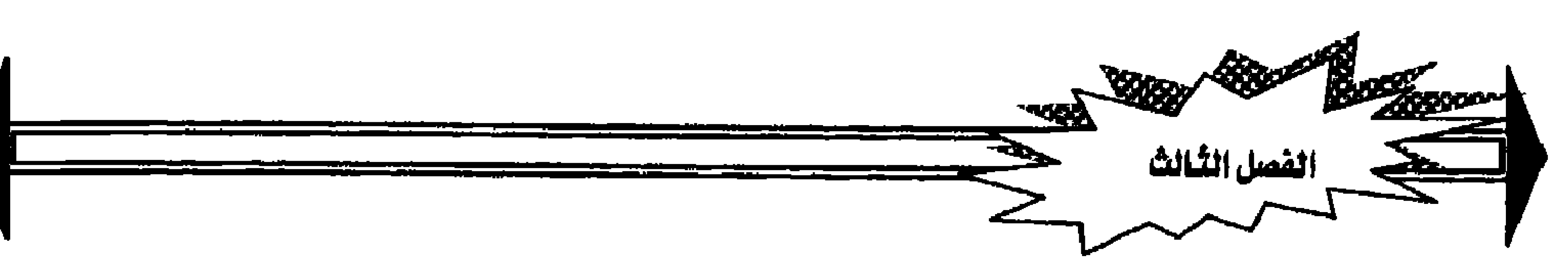
الآن إذا كان ر(س) الباقي من قسمة ك١(س) . ك٢(س) على ق(س) أي أن

ك١(س) ك٢(س)= ق(س) ك(س) + ر(س) ودرجة ر(س) > درجة ق(س)

وحيث أن ق(أ)= ٠، لهذا فإن ك١(أ) ك٢ (أ)= ر(أ)

وحيث أن درجة ر(س) > ن، فإ ر(أ) ∈ م/ {٠}





أي أن $ك_1(أ)\ ك_2(أ) \in م/\ \{0\}$، وعليه فإن $م/\ \{0\}$ مغلقة بالنسبة لعملية الضرب

لكل $ك(أ) \in م/\{0\}$ حيث $ك(س) \in ق^{(1)}[س]$ ودرجة $ك(س) > ن$

هنا نلاحظ أن $ك(أ) \neq 0$، $ك(أ)= 0$ لهذا فإن $ق(س) \neq ك(س)$ ولكن $ق(س)$ غير قابلة للتحليل فإن $(ق(س)، ك(س))= 1$، ولهذا فإنه توجد حدوديتين $شـ(س) \in ق^{(1)}[س]$، $ر(س)$ بحيث $ر(س)\ ق(س) + شـ(س)\ ك(س)= 1$، درجة $شـ(س) >$ درجة $ق(س) = ن$

وبما أن $ق(أ)= 0$ فإن $شـ(أ)\ ك(أ)= 1$

هذا يعني أنه يوجد لكل عنصر لا يساوي الصفر معكوس. وهذا يثبت أن $(م/\ \{0\}، \cdot)$ زمرة تبديلية إذن $(م، +، \cdot)$ مجال.

نلاحظ أنه إذا كانت $هـ(س)= س$ فإن $أ= هـ(أ) \in م$

أي أن م مجال يحوي ق، أ فإن $ق(أ) \leq م$

ولكن من تعريف م، ق(أ) فإن $م \leq ق(أ)$

ولهذا فإن $م = ق(أ)$

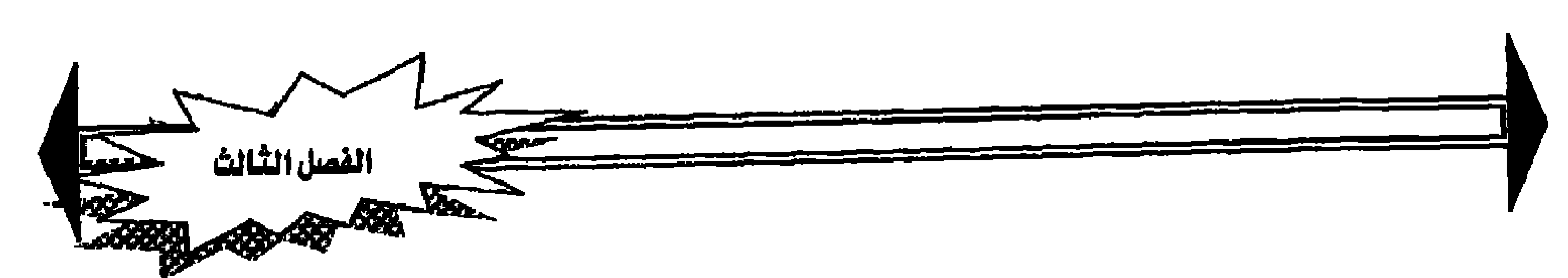
إذن ق(أ) هي مجموعة العناصر من الشكل $ب_0 + ب_1 أ + \dots + ب_{ن-1} أ^{ن-1}$ حيث $ب_0، ب_1، \dots، ب_{ن-1} \in ق$

٢- من الجزء الأول نلاحظ أن كل عنصر في ق(أ) هو عبارة عن تركيبة خطية للعناصر $1، أ، أ^2، \dots، أ^{ن-1}$

أي أن العناصر $1، أ، \dots، أ^{ن-1}$ تولد المجال ق(أ) بالنسبة للمجال ق.

نفرض أن $ب_0، ب_1، \dots، ب_{ن-1} \in ق$ بحيث





$ب_{٠} + ب_{١}م + ب_{٢}م^{٢} + ... + ب_{ن-١}م^{ن-١} = ٠$

ق(م)=٠ وك(س)= $ب_{٠} + ب_{١}س + ... + ب_{ن} + ب_{ن-١}س^{ن-١}$ ∈ ق [س].

بالاعتماد على مبرهنه سابقة فإن ق(س)/ ك(س)، وليكن درجة ق(س)=٠ ودرجة ك(س) < ن وهذا لا يتحقق الا إذا كان ك(س)=٠ أي أن $ب_{٠} = ب_{١} = ب_{٢} = ... = ب_{ن-١} = ٠$

وهذا يعني أن ١، م، ... ، $م^{ن-١}$ مستقلة خطياً وبالتالي تكون المجموعة {١، م، ... ، $م^{ن-١}$} أساس للمجال ق.

٣- من الجزء (٢) فإن أساس المجال ق(م) بالنسبة للمجال ق هي المجموعة {١، م، ... ، $م^{ن-١}$} ولهذا فإن [ق(م)، ق]= ن

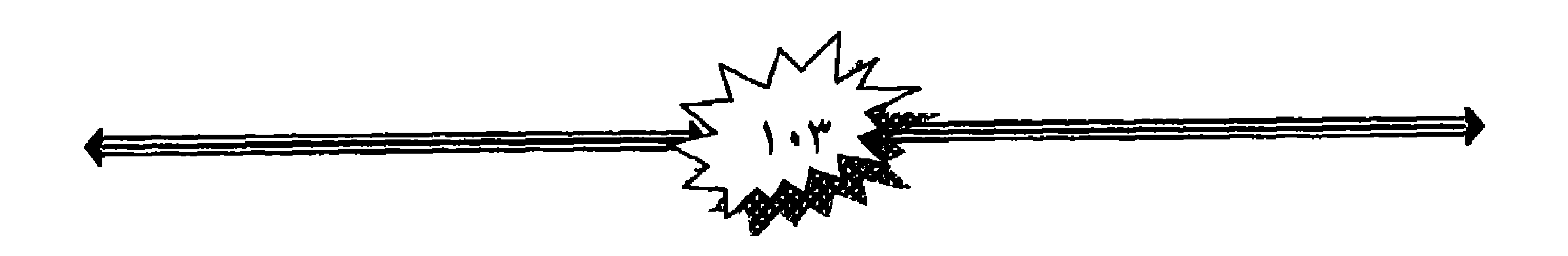
مبرهنة: إذا كان ل توسيعاً للمجال ق، و م ∈ ل فإن م يكون عنصراً جبرياً بالنسبة للمجال ق إذا وإذا كان فقط [ق(م)، ق] < ∞.

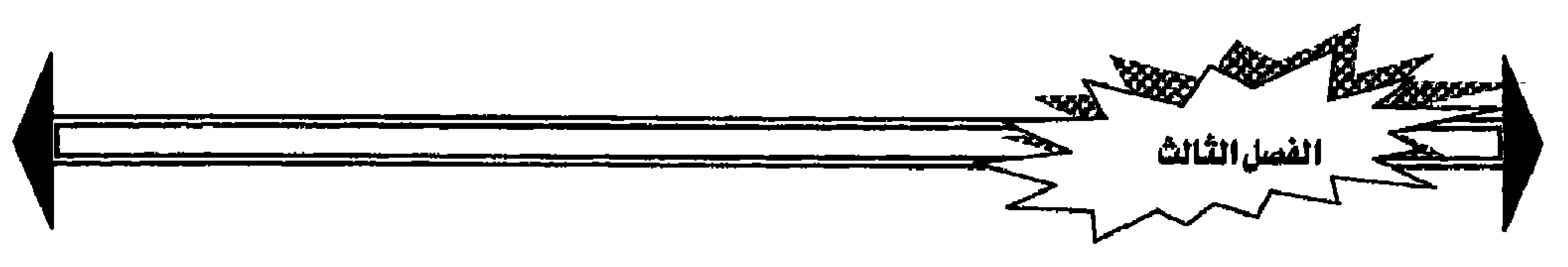
البرهان: إذا كان م عنصراً جبرياً بالنسبة للمجال ق فإنه من المبرهنة السابقة [ق(م)، ق] < ∞ لإثبات الاتجاه الآخر.

نفرض أن [ق(م)، ق]= ن ولكن هذا يعني أن العناصر ١، م، $م^{٢}$، ... ، $م^{ن-١}$، $م^{ن}$

مرتبطة خطياً، أي يوجد $ب_{٠} + ب_{١} + ... ب_{ن}$ ∈ ق ليست كلها أصفار بحيث

$ب_{٠} + ب_{١}م + ب_{٢}م^{٢} + ... + ب_{ن}م^{ن} = ٠$





أي أن أ هو جذر للحدودية ق(س) حيث ٠ ≠ ق(س) = $ب_٠$ + $ب_١$س + ... + $ب_ن$ $س^ن$ ∈ $ق^{(١)}$[س]

إذن أ عنصراً جبرياً بالنسبة للمجال ق.

مبرهنة: كل توسيع منتهي هو توسيع جبري

البرهان: ليكن المجال ل توسيعاً منتهياً للمجال ق أي أن [ل، ق] = ن وليكن أ أي عنصر في المجال ق، فإن ق≤ ق(أ) ≤ ل وبما أن [ل:ق] =[ق(أ) :ق] [ل:ق(أ)] فهذا يعني أن [ق(أ):ق]< ∞.

باستخدام المبرهنة السابقة أ يكون عنصراً جبرياً بالنسبة للمجال ق. ولهذا فإن هذا التوسيع هو توسيع جبري.

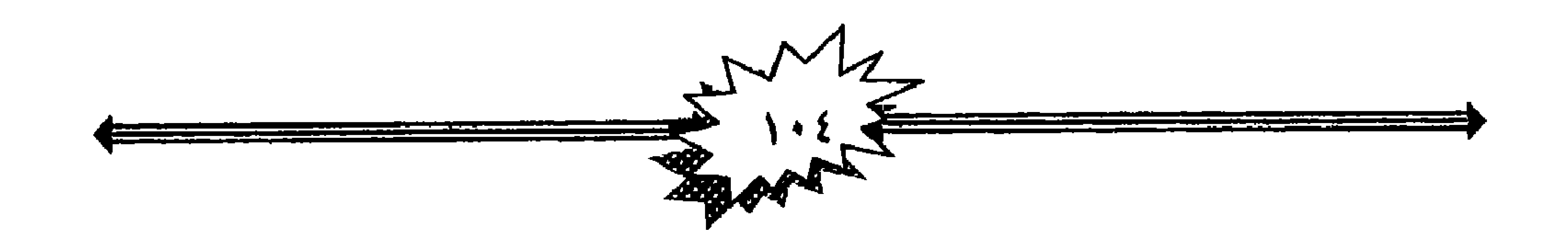
تعريف: إذا كان ق مجالاً وكان لأي حدودية ق(س) ∈ $ق^{(١)}$[س] ذي درجة أكبر من الصفر جذراً في ق. فإنه يقال أن المجال ق مجالاً مغلقاً جبرياً (algebraidly closed field)

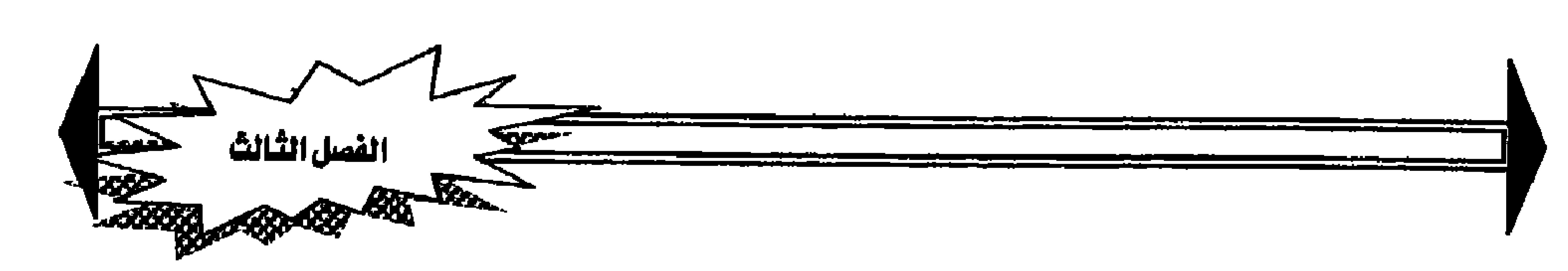
المبرهنة القادمة تبين أن مفهوم المجال المغلق جبرياً يكون ذي علاقة بقابلية الحدودية إلى التحليل إلى عوامل خطية في $ق^{(١)}$[س].

مبرهنة: المجال ق يكون مغلقاً جبرياً إذا وإذا كان فقط كل حدودية ق(س) ∈ $ق^{(١)}$[س] ذي درجة أكبر من الصفر تتحلل في $ق^{(١)}$[س] إلى عوامل خطية.

البرهان:

بفرض أن ق مغلق جبرياً، وأن ق(س) ∈ $ق^{(١)}$[س] حيث أن درجة الحدودية ق(س) أكبر من الصفر (أي غير ثابتة)، إذن ق(س) يكون لها جذر





وليكن أ في المجال ق. باستخدام النتيجة (١) لمبرهنة سابقة س- أ يكون عامل الحدودية ق(س) أي أن ق(س) = (س- أ) ك(س)

مرة أخرى إذا كانت درجة ك(س) أكبر من الصفر، فإنه يكون لها جذر ب في المجال ق، وبالتالي يكون ق(س) = (س- أ) (س-ب) هـ(س)

وبالاستمرار على هذا المنوال تكون ق(س) قد وضعت على صورة عوامل خطية.

العكس: إذا كانت أي حدودية في ق$^{(1)}$[س] تتحلل إلى عوامل خطية.

إذا كان أس-ب أي عامل خطي للحدودية ق(س)، هنا نلاحظ أن $\frac{ب}{أ}$ جذر للحدودية ق(س) وفي المقابل $\frac{ب}{أ}$ ∈ ق، وهذا يعني أن ق مغلق جبرياً.

مبرهنة: كل مجال مغلق جبرياً هو مجال غير منتهي.

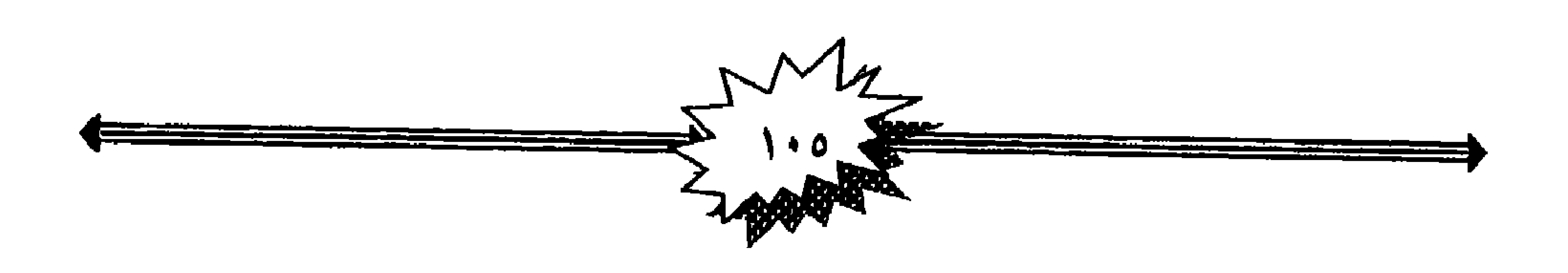
البرهان:

إذا كان المجال ق مجال منتهي، أي أن ق= {أ$_1$، أ$_2$، ...، أ$_ن$}

فإن الحدودية ق(س)= (س- أ$_1$) (س- أ$_2$).... (س- أ$_ن$) + ١ ∈ ق$^{(1)}$[س]

ليس لها جذر في ق

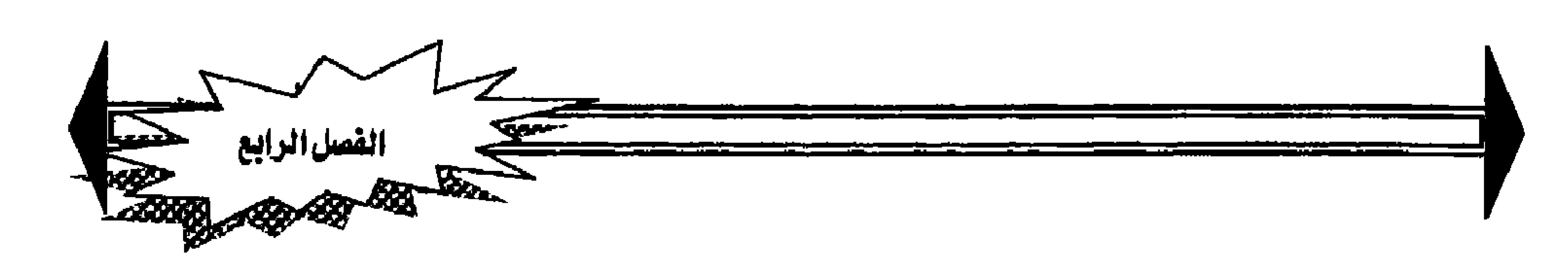
أي أن ق ليس مغلقاً جبرياً.





الاحتمال الشرطي والحوادث المستقلة

Conditional probability and Independence



الفصل الرابع

الاحتمال الشرطي والحوادث المستقلة

Conditional probability and Independence

الاحتمال الشرطي Conditional probability

لتوضيح مفهوم الاحتمال الشرطي والفرق بينه وبين الاحتمال الكلي لحادثة ما يلزمنا أولاً معرفة الفرق بين سحب وحدة ما من عدة وحدات بإرجاع أو بدون إرجاع لذلك نعتبر المثال الآتي بفرض أن لدينا صندوق به ١٠ مصابيح منهم ٧ مصابيح صالحة (تعمل بكفاءة)، ٣ مصابيح غير صالحة فإذا تم سحب مصباحين من هذه المصابيح سواء بإرجاع أو بدون إرجاع.

أولاً إذا كان السحب بإرجاع:

وبفرض أن أ= {المصباح الأول معيب}

ب= {المصباح الثاني معيب}

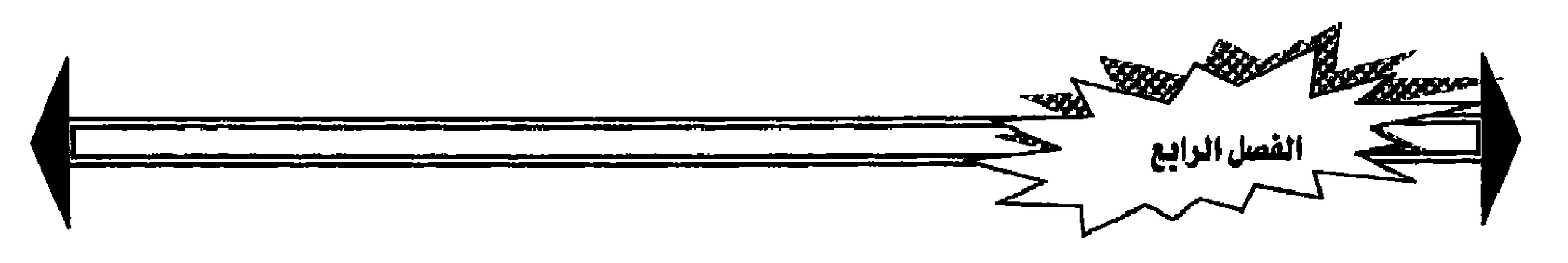
فإن $ح(أ)=ح(ب)=\frac{٣}{١٠}=٠,٣$

ثانياً إذا كان السحب بدون إرجاع

فإن $ح(أ)=\frac{٧}{١٠}=٠,٧$

لكن عند حساب ح(ب) نجد أنه يعتمد على نوع السحب في المرة الأولى وبالتالي فإن احتمال حدوث ب يعتمد على كون أ حدثت أو لم تحدث، وهذا يقودنا إلى مفهوم الاحتمال الشرطي.





تعريف الاحتمال الشرطي Conditional probability

لتكن أ، ب حادثتان من فضاء العينة Ω فإننا نرمز للاحتمال الشرطي ح(ب/أ) وهو يعني احتمال الحادثة ب بشرط حدوث الحادثة أ ويعطى بالصورة:

$$ح(ب/أ)=\frac{ح(ب\cap أ)}{ح(أ)}،\ ح(أ)\neq ٠$$

وبالمثل فإن $ح(أ/ب)=\frac{ح(أ\cap ب)}{ح(ب)}،\ ح(ب)\neq ٠$

هو الاحتمال الشرطي لحدوث أ بشروط حدوث ب مسبقاً.

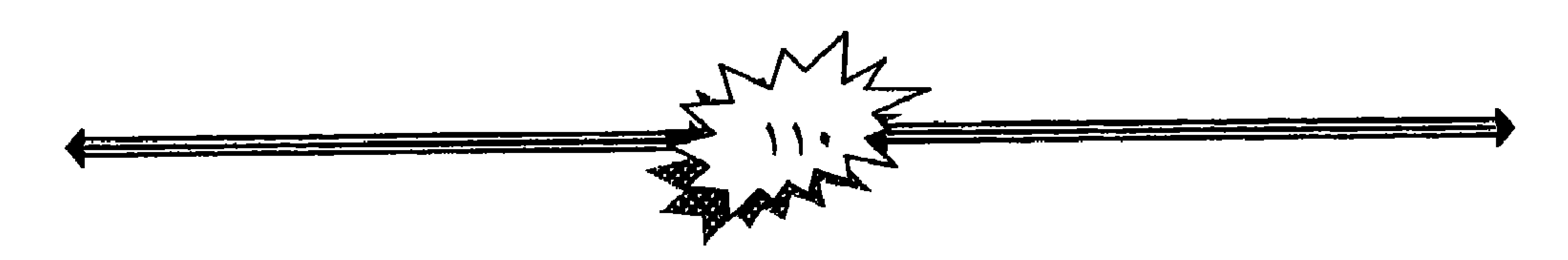
ففي المثال السابق نجد أن $ح(ب/أ)=\frac{١٩}{٩٩}$ لأنه إذا حدثت الحادثة أ فإن عدد فضاء العينة سوف يقل بمقدار الواحد، ذلك لأن السحب تم بدون إرجاع أو إحلال.

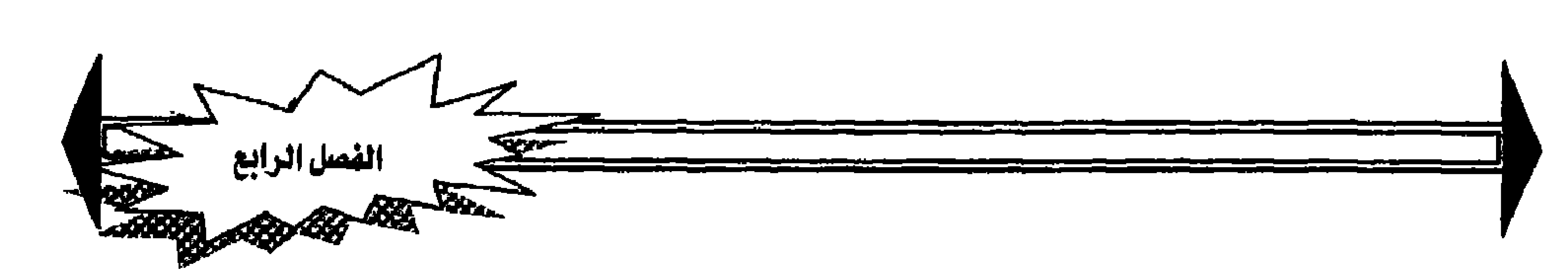
ملحوظة:

عند حساب ح(ب) فإننا نسأل أنفسنا عن عدد عناصر ب أو عدد الطرق التي تقع بها كذلك ما هو عدد الطرق التي يقع بها فضاء العينة Ω أما إذا أردنا حساب ح(ب/أ) فإننا نركز أنفسنا على عدد عناصر الحادثة ب وعلى عدد عناصر أ وهذا يني أنه تم تخفيض عناصر الفضاء من Ω إلى أ.

مثال (١):

تم اختيار كرة من صندوق به كرتان زرقاء مرقمة بالأرقام ٣، ٤ وكرتان





حمراء مرقمة بالأرقام ٥، ٦ وبفرض أننا عرفنا الحوادث الآتية كالآتي:

أ: الكرة المسحوبة زرقاء. أ= {(٣، $\bar{ب}$)، (٤، $\bar{ب}$)}

ب: الكرة المسحوبة حمراء ب= {(٣، ر)، (٤، ر)}

أ: الكرة المسحوبة تحمل رقم أكبر من ٢ جـ= {(٣، ت)، (٤، ر)}

أوجد قيمة ح(أ/ ب)، ح(أ/ جـ) و ح(ب/ أ)

الحل:

واضح أن:

Ω = {(٣، ت)، (٤، ت)، (٥، ر)، (٦، ر)}

وبالتالي فإن ح(أ)=ح(ب)=$\frac{١}{٢}$ وأن ح(أ∩ب)=ح(ϕ)=٠ وبحساب الاحتمال الشرطي لـ أ فإن ح(أ\ب)= ٠ بالمثل فإن ح(أ∩جـ)=ح({(٣،ت)})=$\frac{١}{٤}$ وبالتالي:

$$ح(أ \setminus جـ)=\frac{ح(أ\cap جـ)}{ح(أ)}$$

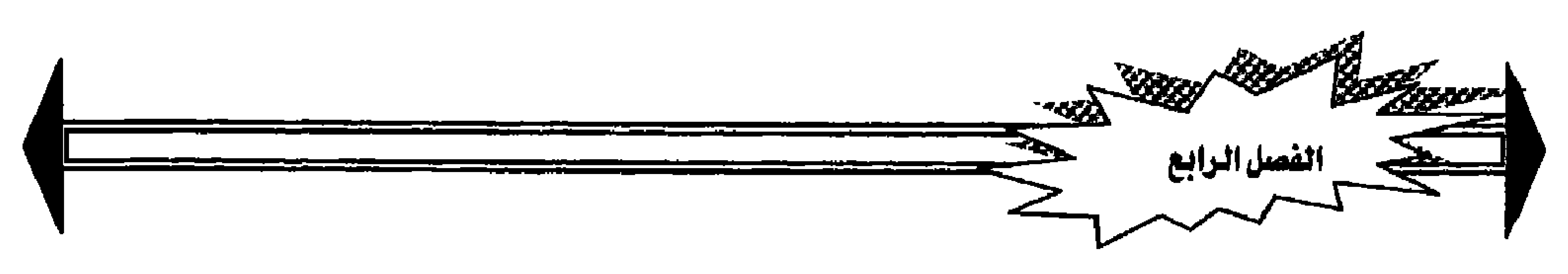
$$=\frac{١/٤}{١/٢}=\frac{١}{٢}$$

كذلك ح(أ∩ب)=ح(ϕ)=٠ وبالتالي:

$$ح(ب \setminus أ)=\frac{ح(أ\cap ب)}{ح(أ)}$$

أي أن من الواضح من هذا المثال أن قد يحدث أن ح(أ/ جـ)= ح(أ) وقد لا يحدث هذا التساوي مثل ح(أ/ ب) ≠ ح(أ). أو ح(ب/ أ) ≠ ح(ب).





والسؤال الآن متى يحدث هذا التساوي. وللإجابة على هـذا الـسؤال نقـوم بصياغة هذا التعريف الآتي:

تعريف الاستقلال Independent event

يقال للحادثين ﺃ، ب أنهم حوادث مستقلة إذا كان ، وفقط إذا كان

ح(ﺃ∩ب)=ح (ﺃ).ح (ب)

وهذا يكافئ الآتي:

ح(ﺃ/ ب) = ح(ﺃ)

أو

ح(ب/ ﺃ)= ح(ب)

وهـذا يعـني أن حـدوث ﺃ لا يـؤثر علـى احتمـالات حـدوث الحادثـة ب والعكس. أما إذا حدث عدم التساوي فتسمى الحوادث غير المستقلة.

مثال (٢):

في المثال السابق:

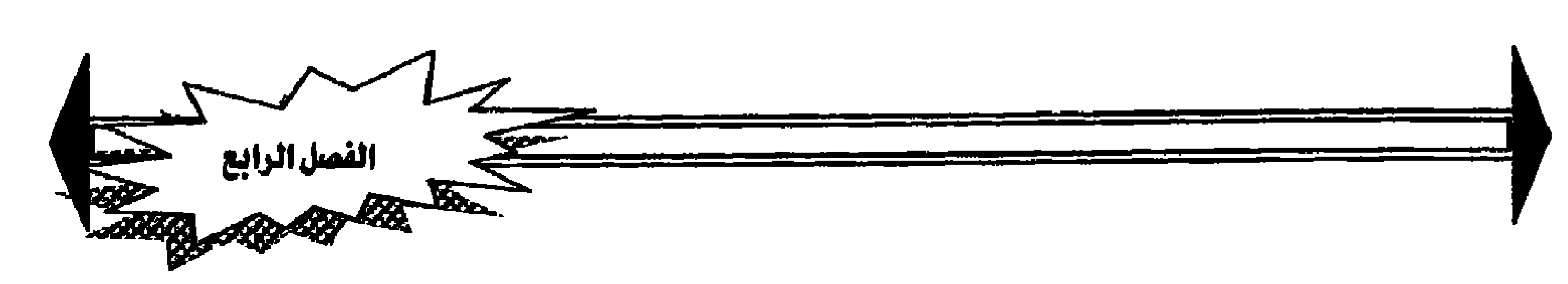
١- هل يمكن اعتبار ﺃ، ب حوادث مستقلة.

٢- هل يمكن اعتبار ﺃ، جـ حوادث مستقلة

الحل:

١- لدينا ح(ﺃ/ ب)= ٠ ≠ ح(ﺃ) وبالتالي فإن الحوادث ﺃ، ب حوادث غـير مستقلة.





٢- بالمثل ح(أ\جـ)=$\frac{1}{2}$ح(أ) وبالتالي فإن الحوادث أ، جـ حوادث مستقلة.

كذلك يمكن تعريف الحوادث المستقلة إذا كان لدينا أكثر من حادثتين كالآتي:

تعريف:

يقال للحوادث أ، ب، جـ أنها مستقلة مثنى مثنى Multually Independent إذا كان:

١- ح(أ ∩ ب) = ح(أ) . ح(ب)

٢- ح(أ ∩ جـ) = ح(أ) . ح(جـ)

٣- ح(ب ∩ جـ) = ح(ب) . ح(جـ)

٤- ح(أ ∩ ب ∩ جـ) = ح(أ) . ح(ب) . ح (جـ)

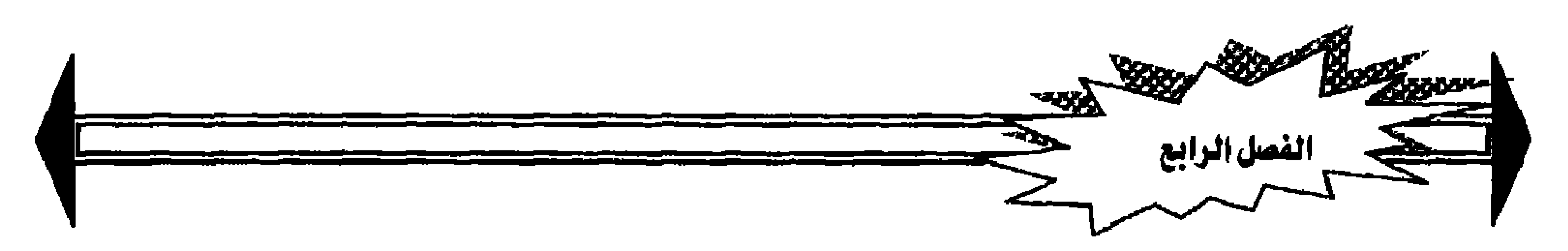
مثال (٤):

بفرض أنه تم إلقاء حجري نرد وعرفنا الحوادث الآتية:

أ= {ظهور عدد زوجي على الحجر الأول}.

ب= {ظهور عدد فردي على الحجر الثاني}.

جـ= {ظهور عددين فرديان معاً أو زوجيان معاً}



برهن أن هذه الحوادث غير مستقلة. على الرغم من أن كل زوج منها يمثل حادثتين مستقلتين.

الحل:

Ω= {(١، ١)، (١، ٢) ....، (١، ٦)، (٢، ١)، (٢، ٢)، ....
(٢، ٦) .... (٦، ١)، (٦، ٢) .... (٦، ٦)}

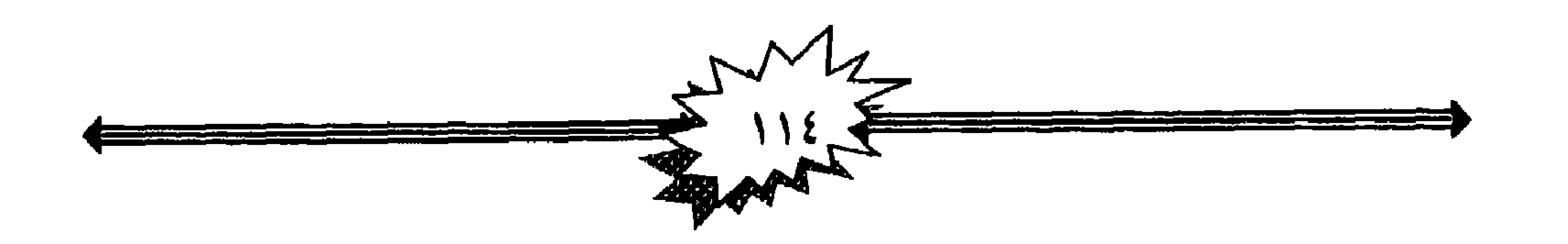
أ= {(٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٤، ١)،
(٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٦)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٣)،
(٦، ٤)، (٦، ٥)، (٦، ٦)}.

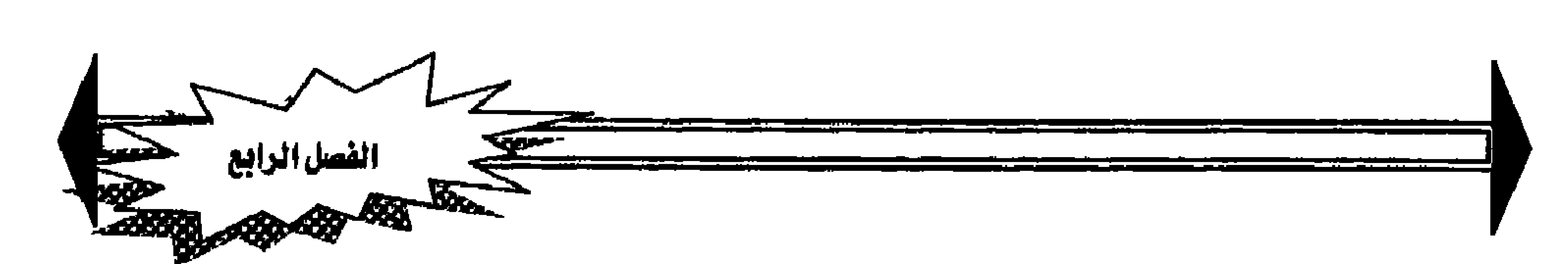
ب= {(١، ١)، (١، ٣)، (١، ٥)، (٢، ١)، (٢، ٣)، (٢، ٥)، (٣، ١)،
(٣، ٣)، (٣، ٥)، (٤، ١)، (٤، ٣)، (٤، ٥)، (٥، ١)، (٥، ٣)، (٥، ٥)،
(٦، ١)، (٦، ٣)، (٦، ٥)}.

جـ= {(١،١)، (٣،١)، (٥،١)، (٢، ٢)، (٢، ٤)، (٢، ٦)، (٣، ١)، (٣، ٣)،
(٣، ٥)، (٤، ١)، (٤، ٣)، (٤، ٥)، (٥، ١)، (٥، ٣)، (٥، ٥)،
(٦، ١)، (٦، ٣)، (٦، ٥)}

أ ∩ ب = {(٢، ١)، (٢، ٣)، (٢، ٥)، (٤، ١)، (٤، ٣)، (٤، ٥)،
(٦، ١)، (٦، ٣)، (٦، ٥)}

أ ∩ جـ = {(٢،٢)، (٢،٤)، (٦،٢)، (٢،٤)، (٤،٤)، (٦،٤)، (٦، ٢)،
(٦، ٤)، (٦، ٦)}





ب ∩ جـ = {(١،١)، (٣،١)، (٥،١)، (١،٣)، (٣،٣)، (٥،٣)، (١، ٥)، (٣، ٥)، (٥، ٥)}

ﻫ ∩ ب ∩ جـ = Ø

ح(ﻫ)=ح(ب)=ح(جـ)= $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

واضح أن:

ح(ﻫ ∩ ب) = ح(ﻫ) . ح(ب) = ٠,٢٥

ح(ﻫ ∩ جـ) = ح(ﻫ) . ح(جـ) = ٠,٢٥

ح(ب ∩ جـ) = ح(ب) . ح(جـ) = ٠,٢٥

ح(ﻫ) . ح(ب) . ح(جـ) = (٠,٢٥) (٠,٢٥) (٠,٢٥)

لكن

ح(ﻫ ∩ ب ∩ جـ) = ٠

أي أن:

ح(ﻫ) . ح(ب) . ح(جـ) ≠ ح(ﻫ ∩ ب ∩ جـ)

*** خصائص الاحتمال الشرطي**

من الواضح لنا أنه يمكن التحقق من أن الاحتمال الشرطي لأي حادثة ما ﻫ بشرط وقوع حادثة أخرى ب ≠ Ø يحقق مسلمات الاحتمال المعروفة والسابقة الذكر في الفصل الرابع من هذا الكتاب.





والآن نعيد صياغة هذه المسلمات بصورة الاحتمال الشرطي:

١- $٠ \leq ح(أ/ب) \leq ١$

٢- $ح(\Omega/ب) = ١$

٣- $ح(أ_١ \cup أ_٢/ب) = ح(أ_١/ب) + ح(أ_٢/ب)$. $أ_١ \cap أ_٢ = \varnothing$

وبصورة عامة

$ح(أ_١ \cup أ_٢ \cup .... \cup أ_ن/ب) = ح(أ_١/ب) + ح(أ_٢/ب) + ... + ح(أ_ن/ب)$

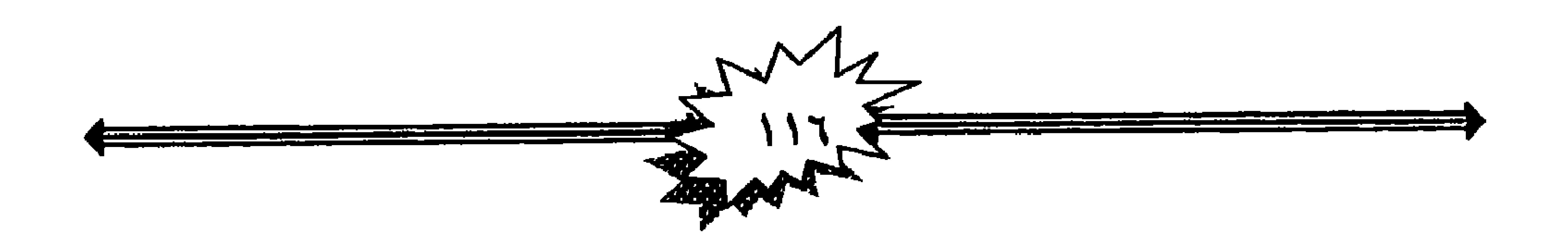
حيث $أ_ي \cap أ_ن = \varnothing$ ، $\forall_ي \neq ن$

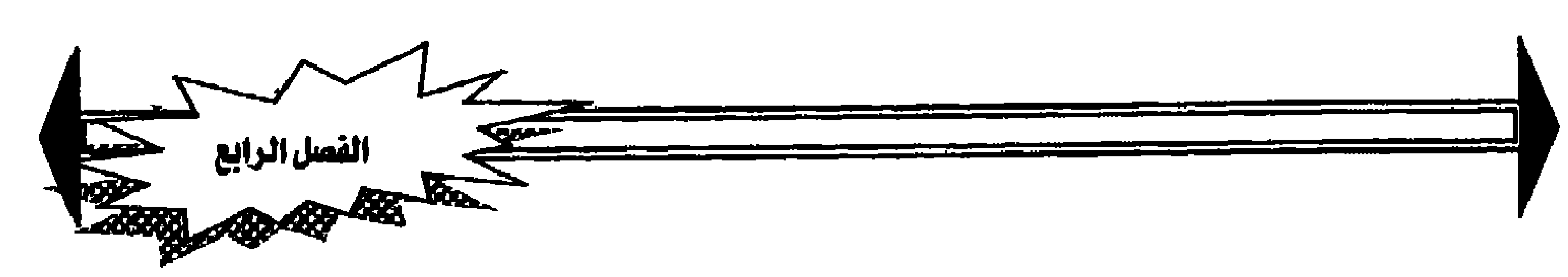
٤- $ح(أ\backslash\Omega) = \frac{ح(أ\cap\Omega)}{ح(\Omega)} = ح(أ)$

٥- لكل حادثة أ من فضاء العينة Ω يكون هناك عددين الأول هو احتمال أ غير المشروط ح(أ) والآخر احتمال أ المشروط ح(أ/ب) بشرط حدوث حادثة ما ب بحيث يكون $ح(ب) > ٠$

مثال (٤):

بفرض أن لدينا صندوق به ٥٠ كرة قدم بعض من هذه الكرات ملون باللون الأسود ونرمز لهم بالرمز (س) بينما الآخر ملون باللون الأبيض ويرمز لهم بالرمز (ب) وهناك من هذه الكرات ما هو جديد ويرمز لهم بالرمز ن بينما





الآخرين تم استخدامه من قبل ويرمز لهم بالرمز و. ويوضح الجدول الآتي عدد هذه الكرات ونوعها:

النوع	الكرة سوداء (س)	الكرة البيضاء (ب)
كرة جديدة ن	٢٠	١٥
كرة قديمة و	١٠	٥
المجموع	٣٠	٢٠

فإذا اختار شخص ما كرة من هذا الصندوق عشوائياً ووجد أنها جديدة ما هو احتمال أن تكون هذه الكرة سوداء ح(س/ ن).

الحل:

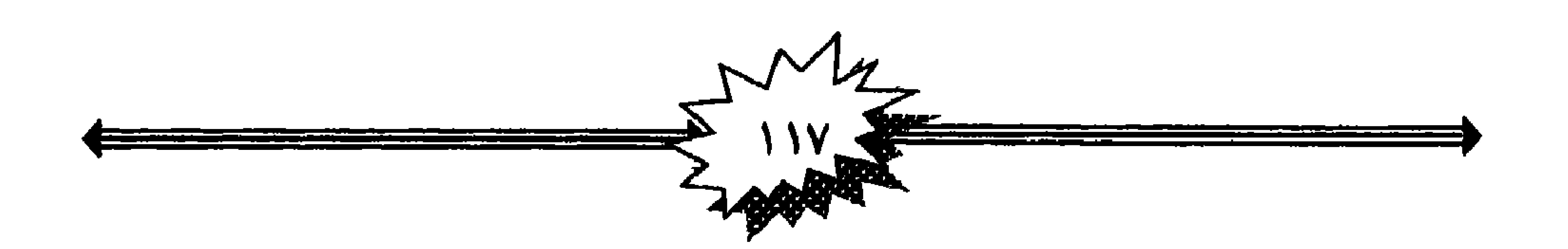
من شكل جدول فإن $ح(س/ن) = \frac{٢٠}{٣٥} = \frac{٤}{٧}$

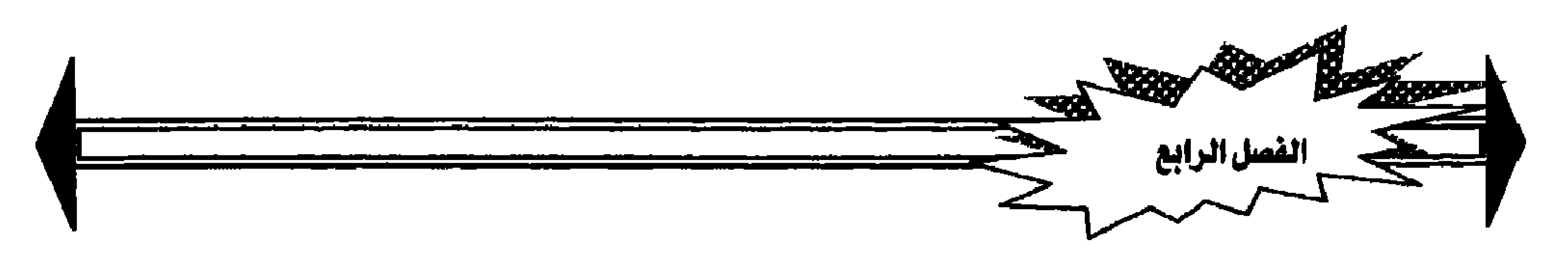
أما إذا طبقنا تعريف الاحتمال الشرطي فإن:

$$ح(س/ن) = \frac{ح(س \cap ن)}{ح(ن)} = \frac{\frac{٢٠}{٥٠}}{\frac{٣٥}{٥٠}} = \frac{٤}{٧}$$

ملحوظة:

يتم حساب الاحتمالات الغير شرطية ح(ن) بالنسبة لفضاء العينة أما الاحتمال الشرطي ح(س/ ن) يتم حسابه بالنسبة للمجموعة ن.





تعريف قاعدة الضرب للاحتمال

The multiplication theorem of probability

لأي حادثين أ، ب فإن:

$$ح(أ \cap ب) = ح(ب/أ) \, . \, ح(أ)$$

أو

$$ح(أ \cap ب) = ح(ب/أ) \, . \, ح(أ)$$

وبصورة عامة يمكننا كتابة لأي مجموعة حوادث غير خيالية $أ_1$، $أ_2$، .... ، $أ_ن$ فإن:

$ح(أ_1 \cap أ_2 \cap .... \cap أ_ن) = ح(أ_1) \, ح(أ_2/أ_1) . ح(أ_3/ \, أ_1، أ_2)$ ....
$ح(أ_ن/ \, أ_1، أ_2، .... ، أ_{ن-1})$

مثال (٥):

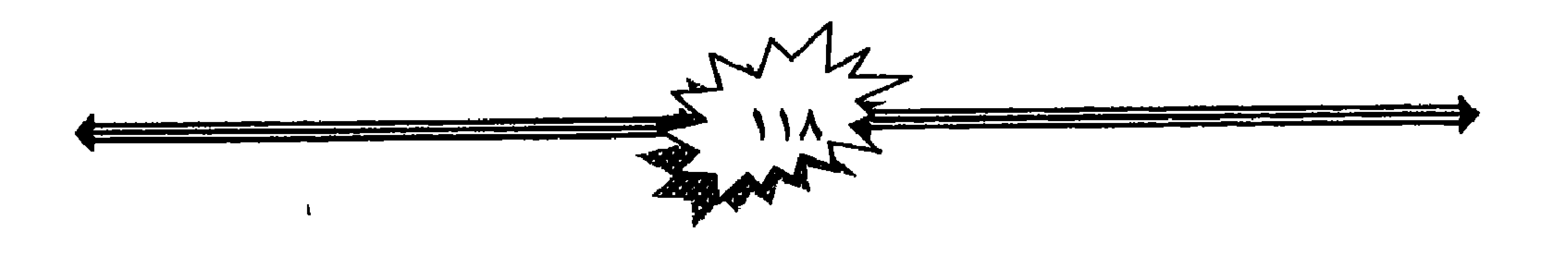
بفرض أن لدينا صندوق به ٢٠ مصباح معيب، ٨٠ مصباح صالح فإذا تم اختيار مصباحين من هذا الصندوق عشوائياً بدون إرجاع فما هو احتمال أن يكونا المصباحين معيبين.

الحل:

بفرض كما سبق أن أ= {المصباح الأول معيب}

ب= {المصباح الثاني معيب}

ح (أ ∩ ب)= ح (سحب المصباحين معيبين)



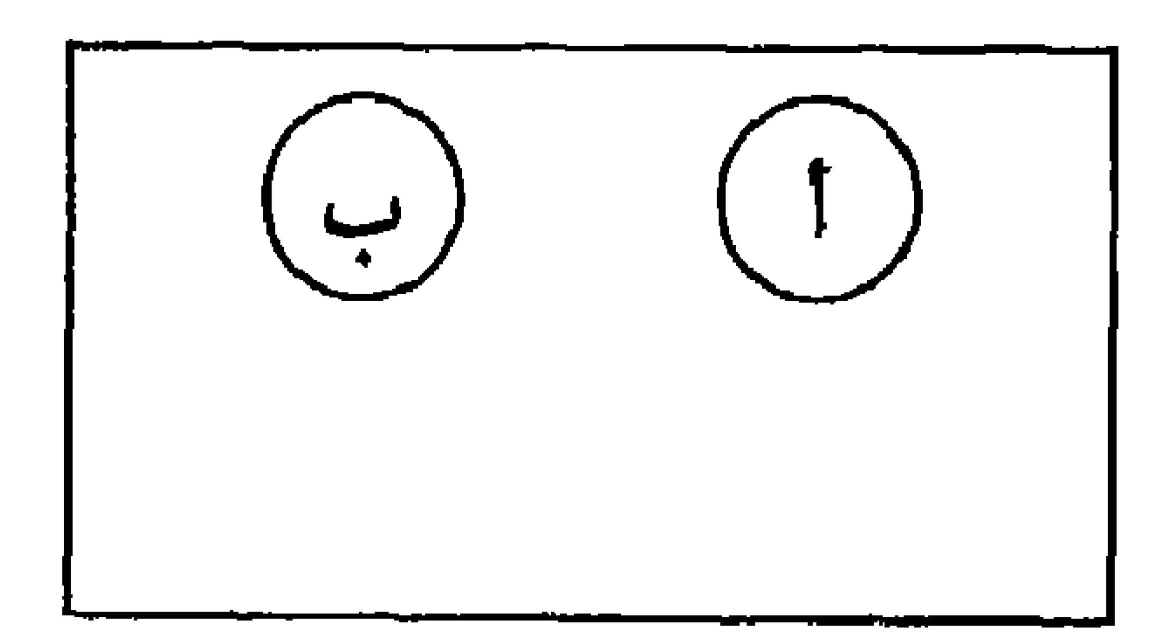
وباستخدام قاعدة ضرب الاحتمال فإن:

$$ح(أ \cap ب) = ح(ب/أ) \cdot ح(أ)$$

$$ح(أ \cap ب) = \frac{١٩}{٩٩} \cdot \frac{٢٠}{١٠٠} = \frac{١٩}{٤٩٥}$$

توضيح العلاقة بين الاحتمال الشرطي وشكل العلاقة بين المجموعات

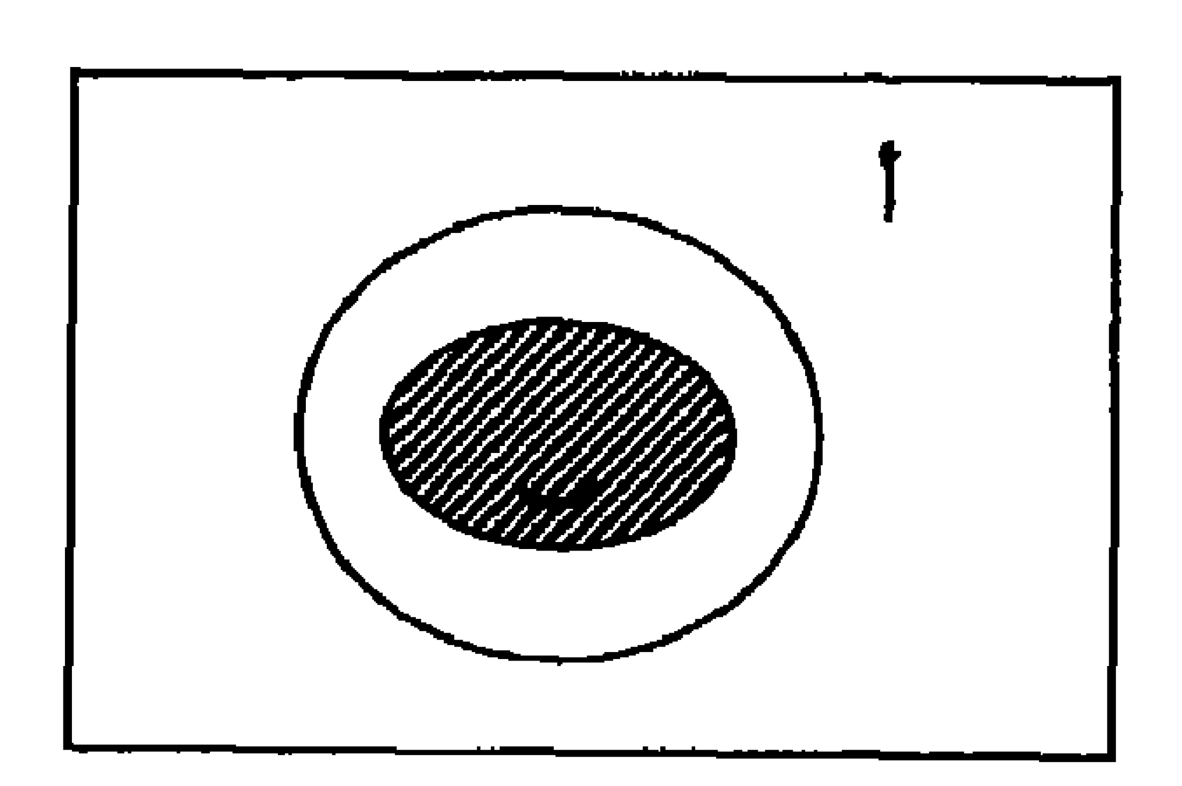
١- $أ \cap ب = \emptyset$



$$\therefore ح(أ/ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)}$$

$$ح(أ/ب) = ٠ \leq ح(أ)$$

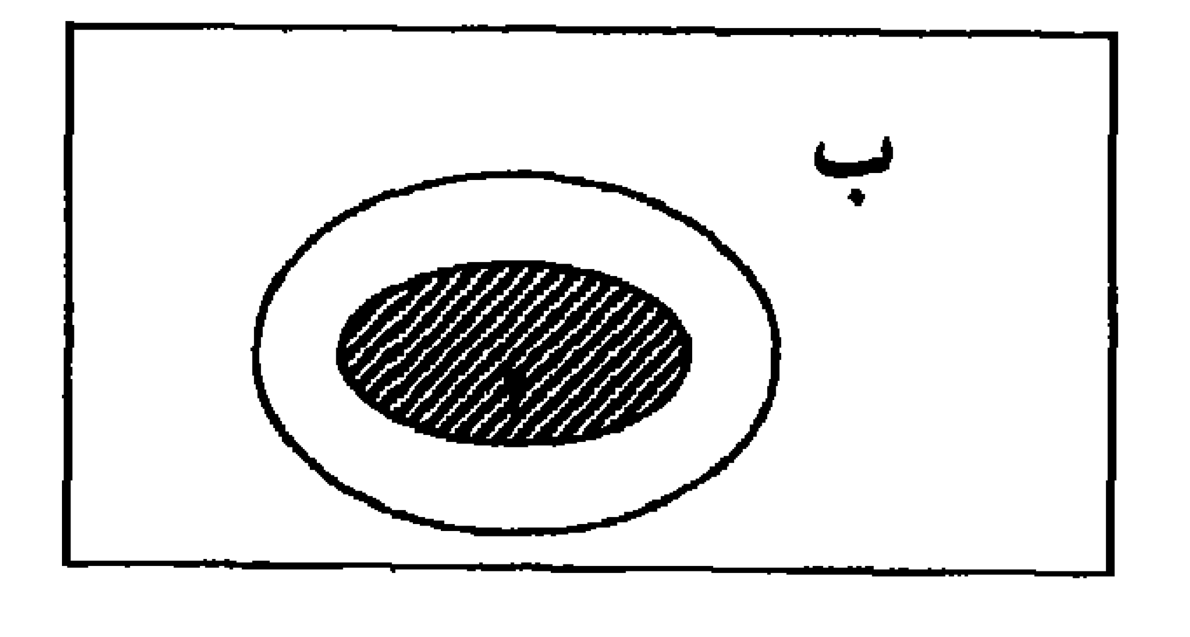
٢- $ب \subseteq أ$



$$\therefore ح(أ/ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)}$$

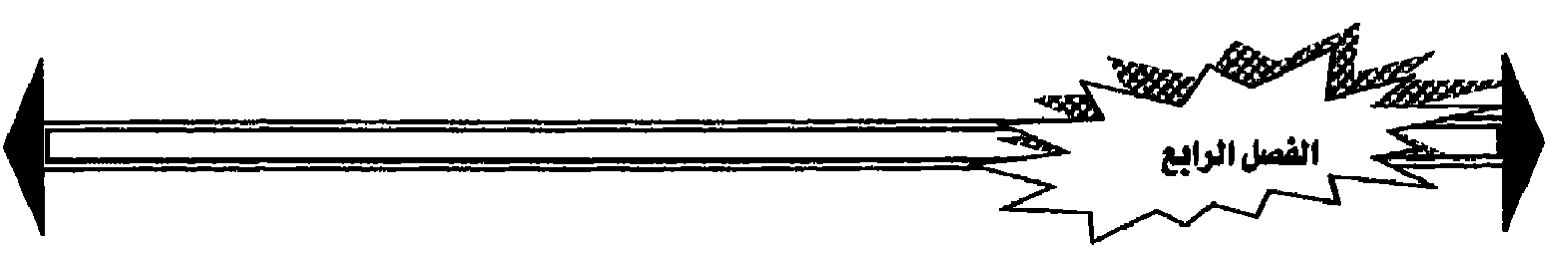
$$ح(أ/ب) = \frac{ح(ب)}{ح(ب)} = ١ \geq ح(أ)$$

٣- $ب \supseteq أ$



$$\therefore ح(أ/ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)}$$

$$\therefore ح(أ/ب) = \frac{ح(أ)}{ح(ب)} \geq ح(أ)$$

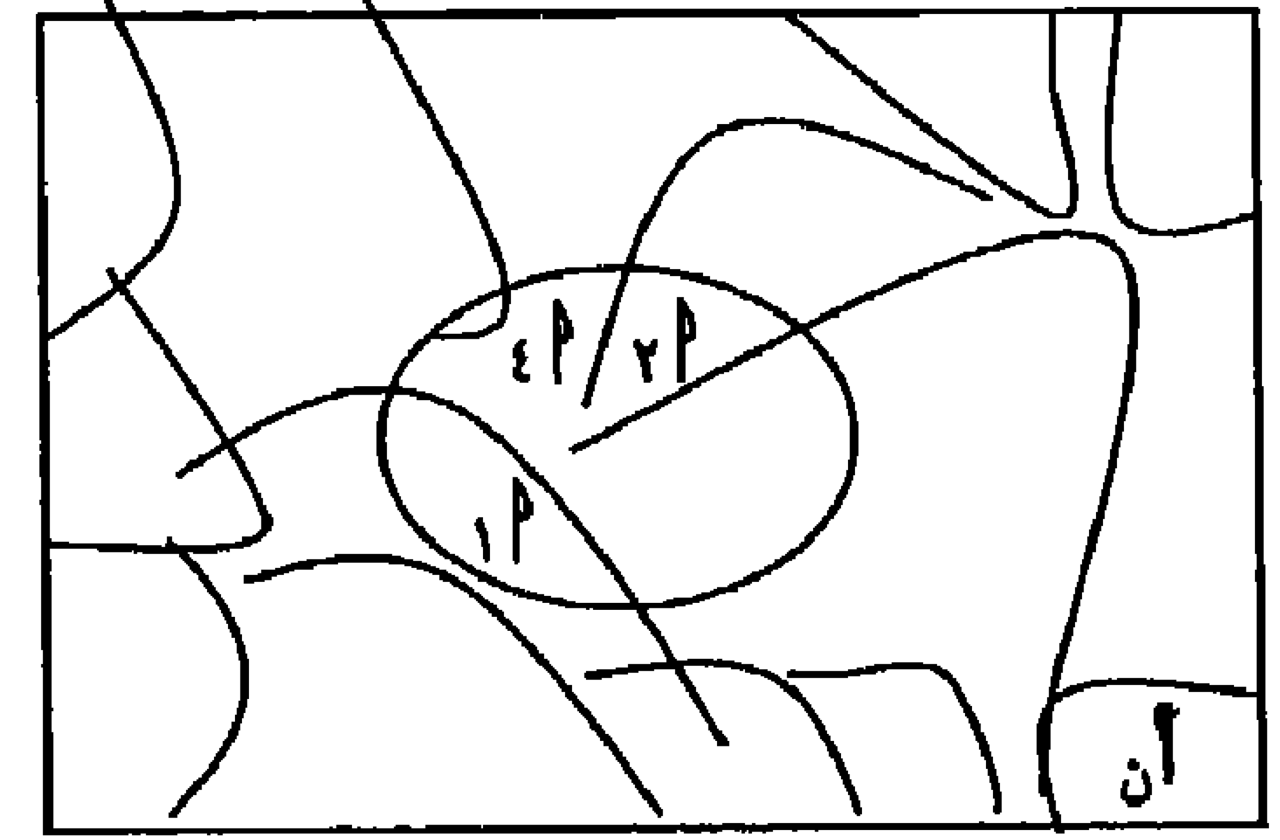


ملحوظة:

في الحالة العامة والتي يكون فيها $أ \cap ب \neq \emptyset$ فإنه لا يمكن إيجاد علاقة نسبية بين قيمة احتمال أ وقيمة الاحتمال الشرطي ح(أ/ ب) بمعنى أنه لا يمكننا القول بأن ح(أ/ ب) $\leq$ ح(أ) أو ح(أ/ ب) $\geq$ ح(أ).

تعريف تجزيء فضاء العينة Partition of the Sample Space

بفرض أن لدينا مجموعة حوادث غير خالية $أ_1$، $أ_2$، ... ، $أ_ن$ فإنها تكون تجزئ لفضاء العينة إذا كان:



١- $\Omega = \bigcup_{ي=1}^{ن} أ_ي$

٢- $أ_ي \cap أ_ر = \emptyset \quad \forall \; ي \neq ر$

٣- $ح(أ_ر) > ٠، \quad \forall \; ر = ١، ٢، ٣، .... ن$

وهذا يعني أن أي حادثة ب من الفضاء Ω يمكن التعبير عنها بدلالته الحوادث $أ_1$، $أ_2$، ...، $أ_ن$ أي أن:

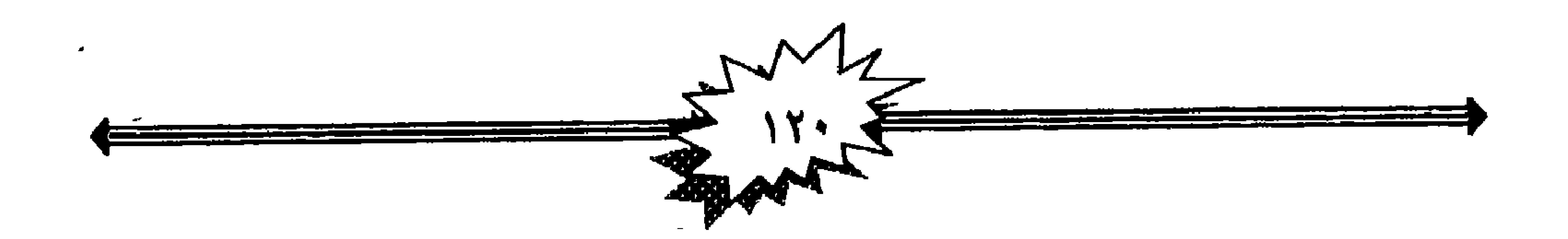
$ب = ب \cap \Omega$

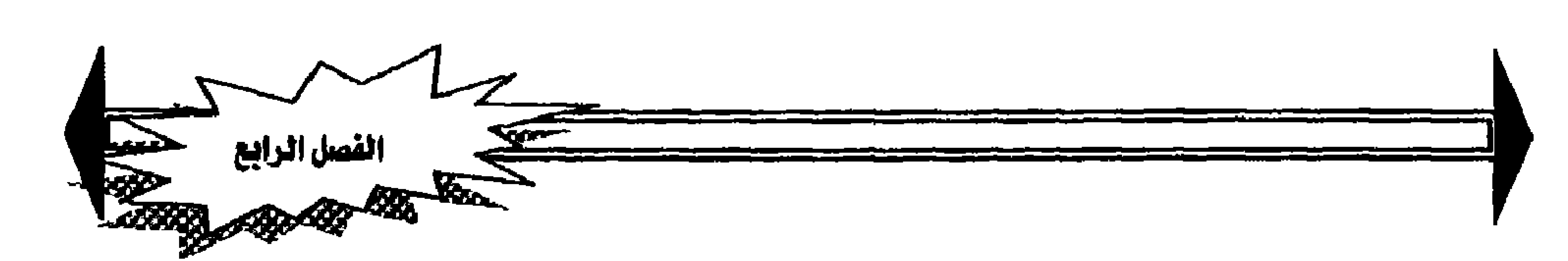
$ب = ب \cap (أ_1 \cup أ_2 \; .... \cup أ_ن)$

$\therefore ب = (ب \cap أ_1) \cup (ب \cap أ_2) \cup ..... \cup (ب \cap أ_ن)$

مثال (٦):

عند إلقاء عملتين مرة واحدة فإن الحوادث = $أ_3$، $أ_2$= {وص، ص و}،





$أ_1$= {و و} {ص ص} هي تجزيء لفضاء العينة Ω حيث Ω هـو: Ω= {و و، وص، ص و، ص ص}

وأي حادثة ب = {و و، و ص} يمكن كتابتها

$$ب = (ب \cap أ_1) \cup (ب \cap أ_2)$$

مثال (٧): عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة هـل يمكـن اعتبـار الحـوادث، $أ_1$= {١، ٢}، $أ_2$= {٣، ٤، ٥} $أ_3$= {٢، ٥، ٦} تجزيء لفضاء العينة Ω= {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

الحل:

لا يمكن لأن $أ_1 \cap أ_3 \neq \emptyset$ ، $أ_2 \cap أ_3 \neq \emptyset$

قانون الاحتمال الكلي The total probability Law

ليكن لـدينا $أ_1$، $أ_2$، ....، $أ_ن$ تجـزيء لفـضاء عينـة مـا Ω وكانـت الحادثـة ب معرفة على فضاء العينة Ω فإن:

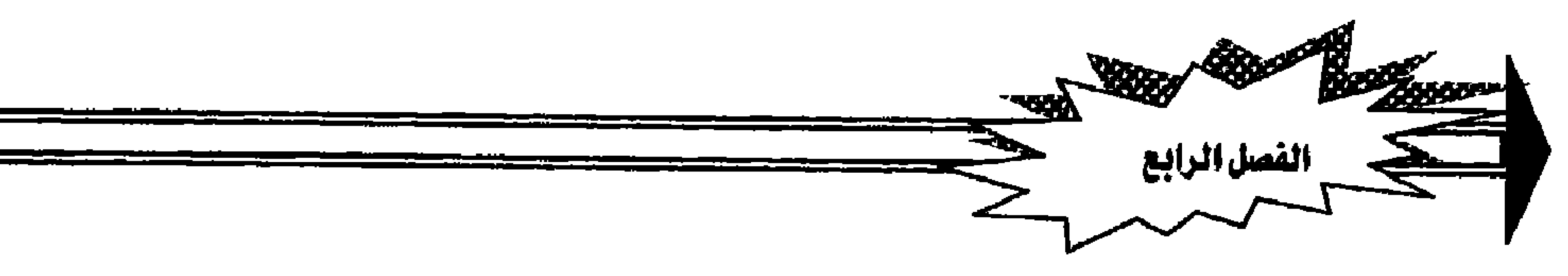
$$ح(ب)= ح(أ_1) . ح(ب/ أ_1) + ح(أ_2) . ح(ب/ أ_2) + ... + ح(أ_ن) . ح(ب/ أ_ن)$$

البرهان:

نعلم أن $أ_1$، $أ_2$، ....، $أ_ن$ هي حوادث عبارة عن تجيزء للفضاء م وإذا كانت ب حادثة ما من Ω فإن $ب= (ب \cap أ_1) \cup (ب \cap أ_2) \cup ..... \cup (ب \cap أ_ن)$

لكن جميع الحوادث $ب \cap أ_1$، $ب \cap أ_2$، .... $ح \cap أ_ن$ هي حوادث متنافية باستخدام مسلحة (٣) من مسلمات الاحتمال فإن:

$$ح(ب)= ح(ب \cap أ_1) + ح(ب \cap أ_2)، \quad .....ح(ب \cap أ_ن).$$



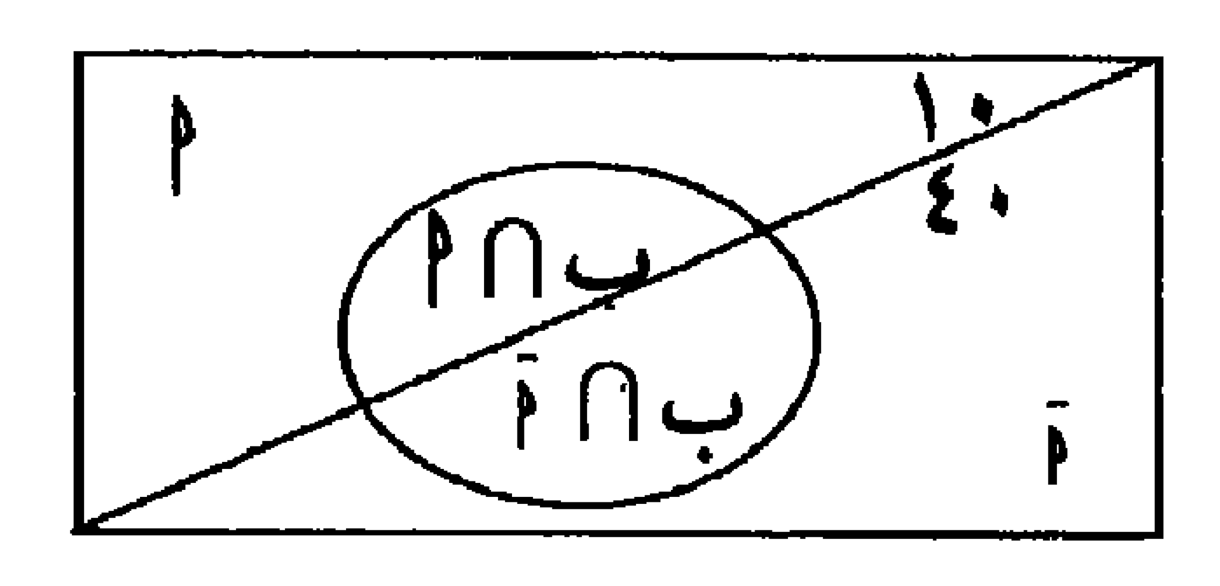
ح(ب ∩ أر)= ح(أر) . ح (ب/ أر)، ر= ١، ٢، ٣، ... ، ن.

وباستخدام قاعدة الضرب الاتية:

فإن:

∴ ح(ب)= ح($أ_١$) . ح(ب/ $أ_١$) + ح($أ_٢$) . ح(ب/ $أ_٢$) + ... + ح($أ_ن$) . ح(ب/ $أ_ن$)

مثال (٨): إذا كان لدينا صندوق به ٥٠ مصباح منهم ١٠ مصابيح معيبة ثم سحب مصباحين عشوائياً وبدون إرجاع فما هو احتمال أن يكون المصباح الثاني معيب



بفرض أن:

أ= {المصباح الأول معيب}

ب= {المصباح الثاني معيب}

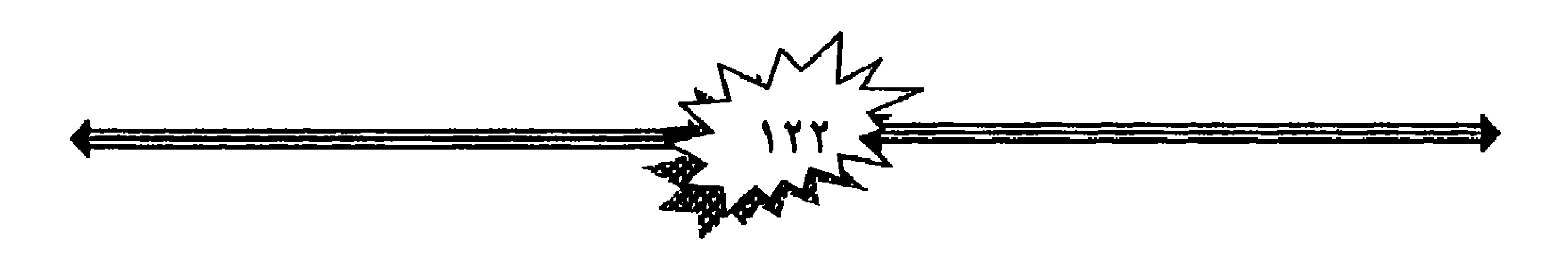
وبالتالي فإننا نريد حساب ح(ب)

ح(ب)=ح(ب∩أ)+ح(ب∩أ̄)=ح(أ).ح(ب/أ)+ح(أ̄).ح(ب/أ̄)

$$ح(ب)=\frac{١٠}{٥٠}.\frac{٩}{٤٩}+\frac{٤٠}{٥٠}.\frac{١٠}{٤٩}=\frac{١}{٢٤٥}[٩+٤٠]=\frac{٤٩}{٢٤٥}$$

طريقة أخرى:

بفرض أن ح هي حادثة سحب مصباح معيب فإن ح̄ هي الحادثة المكملة ويكون احتمال وحدة معيبة في المرة الثانية هو:



$$=\frac{١٠}{٥٠}\cdot\frac{٩}{٤٩}+\frac{٤٠}{٥٠}\cdot\frac{١٠}{٤٩}=\frac{١}{٢٤٥}\left[٩+٤٠\right]=\frac{٤٩}{٢٤٥}$$

$ح\ \frac{١٠}{٥٠}$ ← $ح\ \frac{٩}{٤٩}$ ← $\frac{١٠}{٥٠}\cdot\frac{٩}{٤٩}$

$ح\ \frac{١٠}{٥٠}$ ← $\bar{ح}\ \frac{٤٠}{٤٩}$

$\bar{ح}\ \frac{٤٠}{٥٠}$ ← $ح\ \frac{١٠}{٤٩}$ ← $\frac{٤٠}{٥٠}\cdot\frac{١٠}{٤٩}$

$\bar{ح}\ \frac{٤٠}{٥٠}$ ← $\bar{ح}\ \frac{٣٩}{٤٩}$

مثال (٩): إذا كان لدينا ثلاثة آلات هي أ، ب، جـ تقوم بإنتاج منتج ما بنسبة ٢٥٪، ٣٠٪، ٤٥٪ فإذا كان معلوماً لدينا أن نسب المنتج المعيب من هذه الآلات هي على الترتيب ٢٪، ٥٪، ٣٪ اختيرت وحدة من إنتاج هذه الآلات عشوائياً فما هو احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة؟

الحل:

بفرض أن:

$أ_{١}$= أن تكون الوحدة المختارة من إنتاج أ

$أ_{٢}$= أن تكون الوحدة المختارة من إنتاج ب

$أ_{٣}$= أن تكون الوحدة المختارة من إنتاج جـ

ح($أ_1$)= ٠,٢٥ ، ح($أ_2$)= ٠,٣٠ ، ح($أ_3$)= ٠,٤٥

وبفرض أن

د = سحب وحدة معيبة من الإنتاج

ح(د/$أ_1$)= ٠,٠٢ ، ح(د/$أ_2$)= ٠,٠٥ ، ح(د/$أ_3$)= ٠,٠٣

ح(د)= ح ($أ_1$) ح (د/ $أ_1$) + ح ($أ_2$) ح (د/ $أ_2$) +ح($أ_3$) ح(د/ $أ_3$)

ح(د)= ٠,٢٥ (٠,٠٢) + ٠,٣ (٠,٠٥) + ٠,٤٥ (٠,٠٣) = ٠,٠٣٣٥

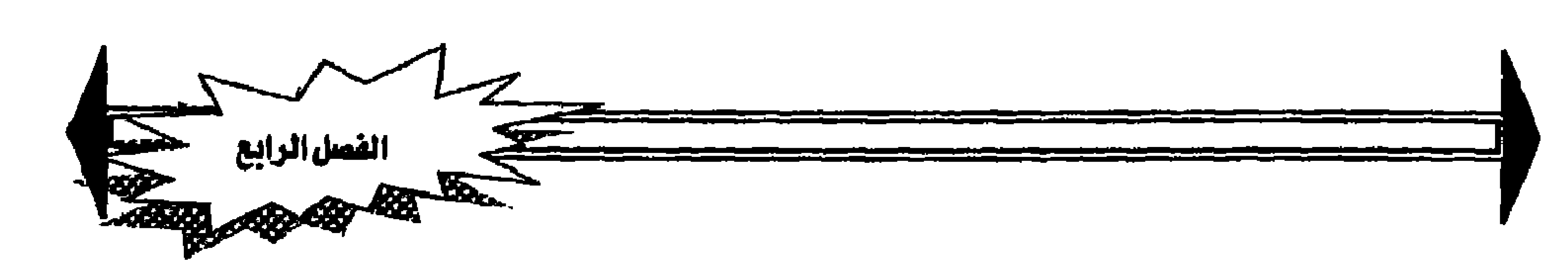
وبطريقة أخرى:

٠,٢٥ — $أ_1$ — ٠,٠٢ — د / $\bar{د}$
٠,٣٠ — $أ_2$ — ٠,٠٥ — د / $\bar{د}$
٠,٤٥ — $أ_3$ — ٠,٠٣ — د / $\bar{د}$

نظرية بيز Bay's Heorem

بفرض أن $أ_1$، $أ_2$، ... ، $أ_ن$ مجموعة من الحوادث تكون تجزيء لفضاء العينة Ω وعرفنا الحادثة ب على فضاء العينة Ω فإن:

$$ح(أ_ي / ب) = \frac{ح(أ_ي).ح(ب/أ_ي)}{\sum_{ك=1}^{ن} ح(أ_ك).ح(ب/أ_ك)}$$



هذه النتيجة معروفة باسم نظرية بيز.

مثال (١٠): في المثال السابق أوجد ح($أ_١$/ د)، ح($أ_٢$/ د)، ح($أ_٣$/ د)

الحل:

من قانون الاحتمال الكلي فإننا أوجدنا $ح(د) = \sum_{ك=1}^{ن} ح(أ_ك) . ح(ب / أ_ك)$

ح(د)= (٠,٢٥) (٠,٠٢) + (٠,٣٠) (٠,٠٥) + (٠,٤٥) (٠,٠٣)

ح(د)= ٠,٠٣٣٥ وباستخدام نظرية بيز فإن:

$$ح(أ_١ / د) = \frac{ح(أ_١ \cap د)}{ح(د)}$$

$$= \frac{ح(أ_١) . ح(د / أ_١)}{\sum_{ك=1}^{٣} ح(أ_ك) . ح(د / أ_ك)} = \frac{(٠,٢٥)(٠,٠٢)}{٠,٠٣٣٥} = ٠,١٥$$

$$ح(أ_٢ / د) = \frac{(٠,٣٠)(٠,٠٥)}{٠,٠٣٣٥} = ٠,٤٥$$

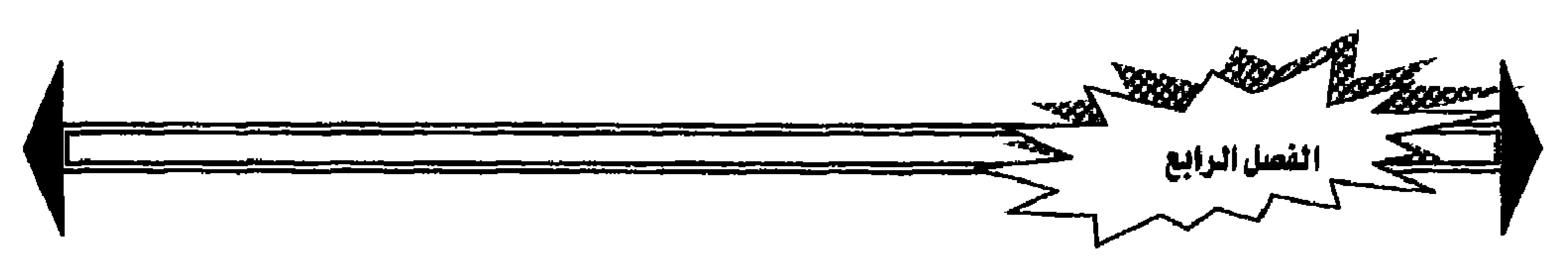
$$ح(أ_٣ / د) = \frac{ح(أ_٣) . ح(د / أ_٣)}{ح(د)} = \frac{(٠,٤٥)(٠,٠٣)}{٠,٠٣٣٥} = ٠,٤$$

لاحظ أن ح($أ_١$/ د) + ح($أ_٢$/ د) + ح($أ_٣$/ د)= ١

مثال (١١):

في مصنع لتجميع السيارات في ورشتين هما $أ_١$، $أ_٢$ وكان $أ_١$ يقوم بتجميع ٦٠٪ من الإنتاج الكلي بينما $أ_٢$ يقوم بتجميع ٤٠٪ من الإنتاج الكلي فإذا كان معلوماً أن نسبة المعيب من إنتاج الورشة الأولى $أ_١$ هي ٥٪ أما نسبة





المعيب من إنتاج الورشة الثانية $أ_٢$ هي ٤٪ اختيرت سيارة عشوائياً ووجدت معيبة فأوجد الاحتمال أن تكون من إنتاج الورشة الأولى.

الحل:

بفرض السيارة من إنتاج الورشة الأولى = $أ_١$

السيارة من إنتاج الورشة الثانية = $أ_٢$

السيارة المختارة معيبة = د

$ح(أ_١) = \frac{٦٠}{١٠٠} = ٠,٦$ ، $ح(أ_٢) = ٠,٤$

$ح(د/ أ_١) = ٠,٠٥$ ، $ح(د/ أ_٢) = ٠,٠٤$

من قانون الاحتمال الكلي فإن

$$ح(د) = \sum_{ي=١}^{٢} ح(أ_ي) . ح(د / أ_ي)$$

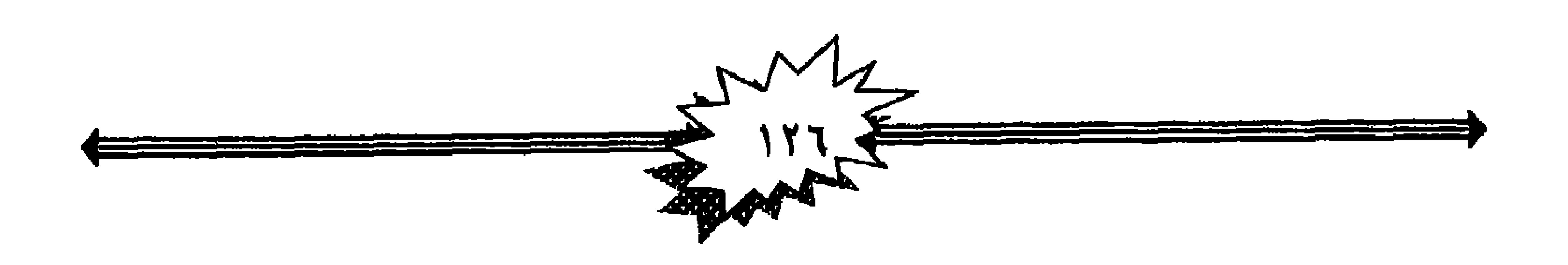
$$= ح(أ_ي) . ح(د/ أ_١) + ح(أ_٢) . ح(د/ أ_٢)$$

$$= (٠,٦) (٠,٠٥) + (٠,٤) (٠,٠٤) = ٠,٠٤٦$$

باستخدام نظرية بيز فإن:

$$ح(أ_١ / د) = \frac{ح(أ_١).(د / أ_١)}{ح(د)} = \frac{(٠,٦)(٠,٠٥)}{(٠,٦)(٠,٠٥)+(٠,٤)(٠,٠٤)} = \frac{١٥}{٢٣}$$

وإذا أردنا إيجاد احتمال أن تكون من إنتاج الورشة الثانية بشرط أن تكون معيبة فإن



$$ح(أ_٢ / د) = ١ - ح(أ_١ / د) = \frac{٨}{٢٣}$$

أو بطريقة أخرى

$$ح(أ_٢ / د) = \frac{ح(أ_٢) . (د / أ_٢)}{ح(د)} = \frac{٨}{٢٣}$$

مثال (١٢):

في مصنع ما كان لدينا ثلاث ماكينات أ، ب، جـ إنتاج هذه الماكينات من الإنتاج الكلي هي على الترتيب ٥٠٪، ٣٠٪، ٢٠٪ وكانت نسبة المعيب من هذه الماكينات هي على الترتيب ٤٪، ٥٪، ٢٪، أخذت وحدة إنتاج عشوائياً فما هو احتمال أن تكون الماكينة أ بشرط أن تكون معيبة.

الحل:

بفرض أن أ= أن تكون الوحدة المسحوبة عشوائياً من أ

ب= أن تكون الوحدة المسحوبة عشوائياً من ب

جـ= أن تكون الوحدة المسحوبة عشوائياً من جـ

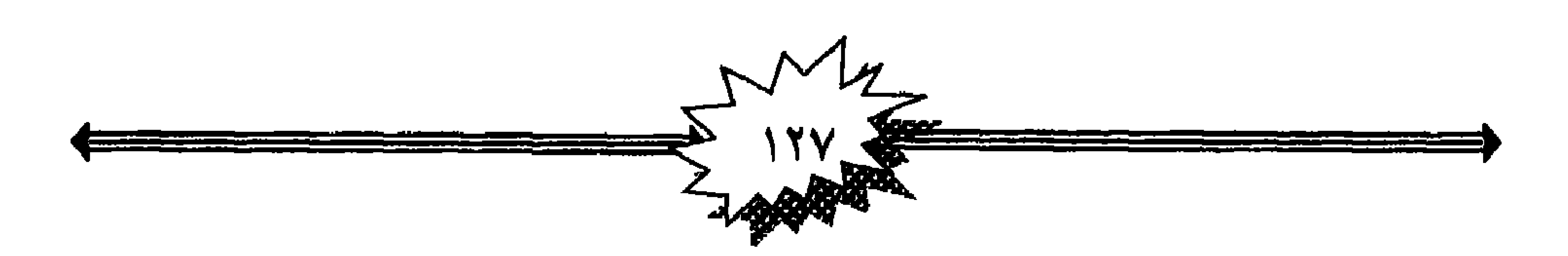
د= أن تكون الوحدة المسحوبة معيبة.

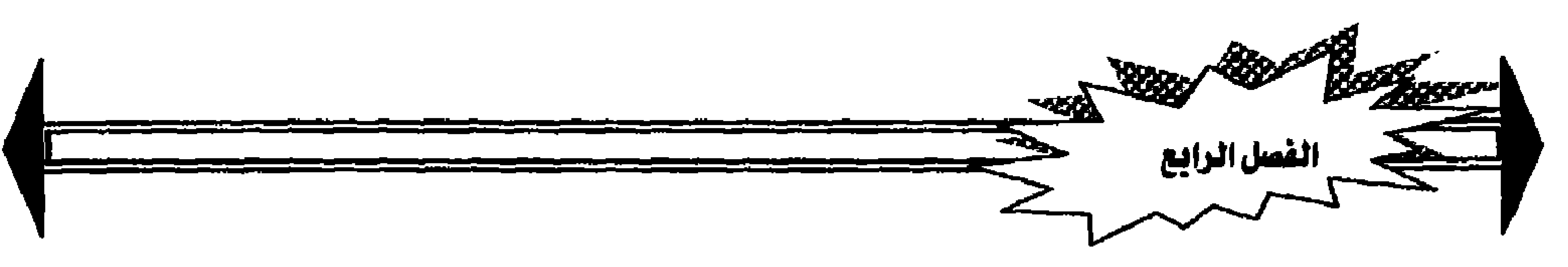
ح(أ)= ٠,٥ ، ح(ب)= ٠,٣ ، ح(جـ)= ٠,٢

ح(د/ أ)= ٠,٠٤ ، ح(د/ ب)= ٠,٠٥ ، ح(د/ جـ)= ٠,٠٢

ح(د)= ح (أ) .ح (د/ أ) + ح (ب) .ح(د/ب) +ح(جـ).ح(د / جـ)

= (٠,٥) (٠,٠٤) + (٠,٣) (٠,٠٥) + (٠,٢) (٠,٠٢) = ٠,٠٣٩





وباستخدام نظرية بيز $ح(أ/د)=\frac{ح(أ).(د/أ)}{ح(د)}=\frac{(٠,٥)(٠,٠٤)}{٠,٠٣٩}=\frac{٢٠}{٣٩}$

وبالمثل يمكن حساب احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من إنتاج ب بشرط أن تكون معيبة:

$$ح(ب/د)=\frac{ح(ب).(د/ب)}{ح(د)}=\frac{١٥}{٣٩}$$

احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من إنتاج جـ بشرط أن تكون معيبة

$$ح(جـ/د)=\frac{ح(جـ).(د/جـ)}{ح(د)}=\frac{٤}{٣٩}$$

لاحظ أن ح(أ/د) + ح(ب/د) + ح(جـ/د)= ١

مثال (١٣):

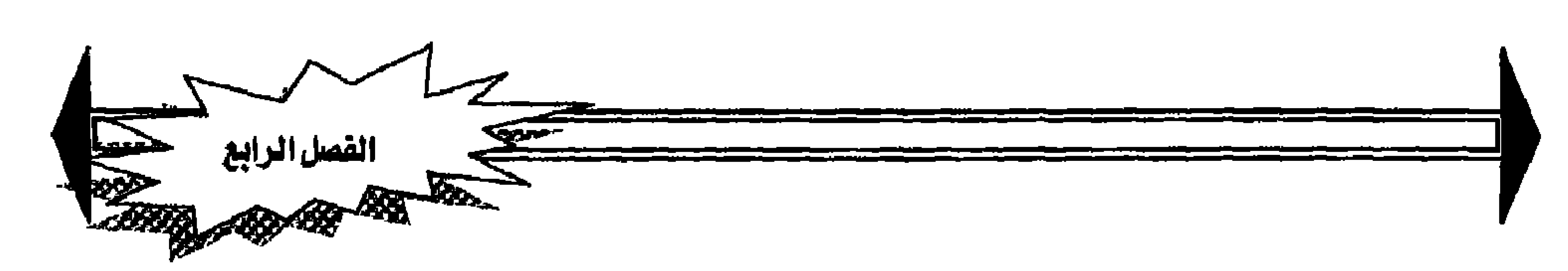
إذا كان لدينا صندوقان الأول به ع كرات بيضاء و ٦ كرات سوداء أما الصندوق الثاني فيحتوي على ٨ كرات بيضاء و ٥ كرات سوداء. ألقي حجر نرد فإذا كان الناتج أقل من ٥ فإننا نسحب كرة من الصندوق الأول وبخلاف ذلك تسحب كرة من الصندوق الثاني فإذا سحبت كرة ووجدت أنها بيضاء فما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق الأول.

الحل:

$$ح(أ_١)= ح(١ \text{ أو } ٢ \text{ أو } ٣ \text{ أو } ٤)= \frac{٤}{٦}=\frac{٢}{٣}$$

$$ح(أ_٢)= ح(٥ \text{ أو } ٦) = \frac{٢}{٦}=\frac{١}{٣}$$

$$ح(و/أ_١)= \frac{٤}{١٠} ، ح(و/أ_٢) = \frac{٨}{١٣}$$

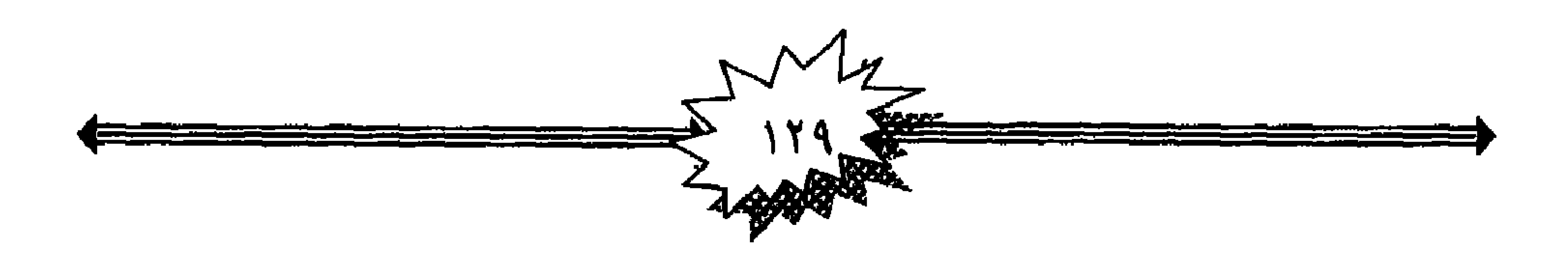


$$\text{ح}(\text{و}) = \text{ح}(\text{أ}_١)\,\text{ح}(\text{و}/\text{أ}_١) + \text{ح}(\text{أ}_٢)\,\text{ح}(\text{و}/\text{أ}_٢) =$$

$$\left(\frac{٢}{٣}\right)\left(\frac{٤}{١٠}\right) + \left(\frac{١}{٣}\right)\left(\frac{٥}{١٣}\right) = ٠,٣٩٥$$

وباستخدام نظرية بيز فإن احتمال أن تكون الكرة من الصندوق الأول بشرط أنها بيضاء هو

$$\text{ح}(\text{أ}_١/\text{و}) = \frac{\text{ح}(\text{أ}_١).\text{ح}(\text{و}/\text{أ}_١)}{\text{ح}(\text{و})} = \frac{\left(\frac{٢}{٣}\right)\left(\frac{٤}{١٠}\right)}{٠,٣٩٥} = ٠,٦٧٥$$





تمارين

١- شركة مكونة من ثلاثة مصابيح تنتج ٢٠٪، ٣٠٪، ٥٠٪ من الإنتاج الكلي للشركة فإذا كانت نسبة المعيب لهذه المصانع هي ٣٪، ٤٪، ٥٪ اشترى مشتري وحدة من إنتاج هذه الشركة فما هو احتمال أن تكون من إنتاج المصنع الأول.

٢- صندوقان يحتوي الأول على ٣ كرات بيضاء و ٢ سوداء أما الصندوق الثاني يحتوي على ٤ كرات بيضاء، ٣ سوداء سحبت كرة من الصندوق الأول ووضعت في الصندوق الثاني ثم سحبت كرة من الصندوق الثاني أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

٣- اختير عددان س و ص عشوائياً بين ٠ ، ١ وبفرض أن أ، ب، جـ حوادث معرفة كالآتي:

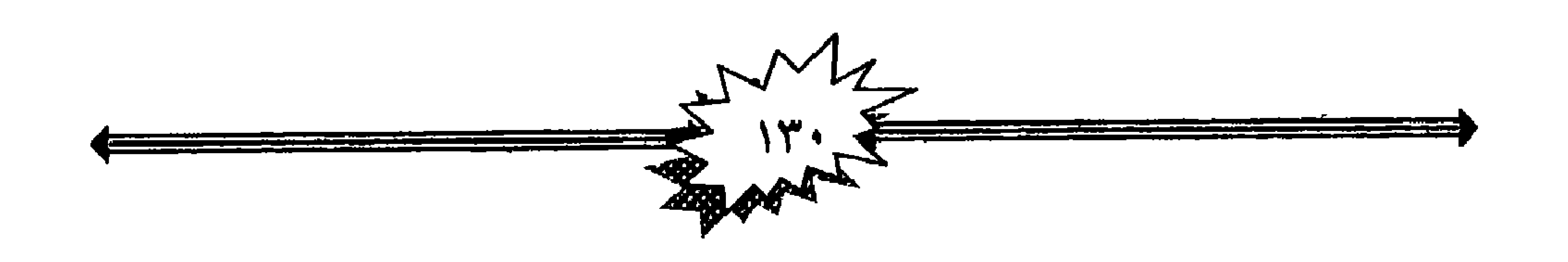
أ= {س: س ≤ ٢٥ , ٠}، ب= {ص: ص ≤ ٢٥ , ٠} ، جـ= {س ≤ ص}

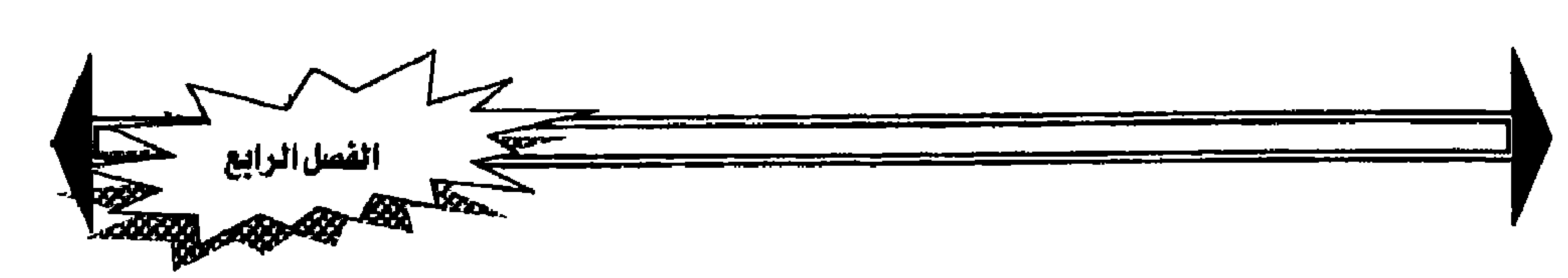
فإذا كان احتمال أي حادثة يساوي مساحة هذه الحادثة فأوجد احتمالات الحوادث أ و ب و جـ وهل يمكن القول بأنهم حوادث مستقلة أم لا.

٤- وضح أن الاحتمال الشرطي ح(أ/ ب) يحقق مسلمات الاحتمال.

٥- وضح أن الحوادث أ، ب مستقلة إذا كان ح(أ/ ب) = ح(أ/ $\overline{ب}$).

٦- وضح أنه إذا كانت الحوادث أ، ب مستقلة فإن: أ، $\overline{ب}$ حوادث مستقلة وكذلك $\overline{أ}$، ب حوادث مستقلة وأيضاً $\overline{أ}$،$\overline{ب}$ حوادث مستقلة.





٧- شركة تأمين أمنت على ٢٠٠٠ من راكبي الموتوسيكلات و ٤٠٠٠ من راكبي السيارات و ٦٠٠٠ من راكبي الشاحنات، فإذا كان احتمال أن يحدث لأي منهم حادثة هو على الترتيب ١٥ ,٠، ٠٣ ,٠، ٠١ ,٠ فإذا علم أن لشخص من الأشخاص المؤمن عليها قد حدثت له حادثة؟ فما هو احتمال أن يكون هذا الشخص من راكبي الموتوسيكلات.

٨- وضح ما إذا كانت العلاقة الآتية صحيحة أم خاطئة

ح(أ/ ب) + ح(أ/ $\overline{ب}$)= ١





التحويلات الخطية

الفصل الخامس

التحويلات الخطية

التحويل الخطي:

سندرس اقترانات من نوع آخر متغيراتها متجهات ونبدأ بالتعريف التالي:

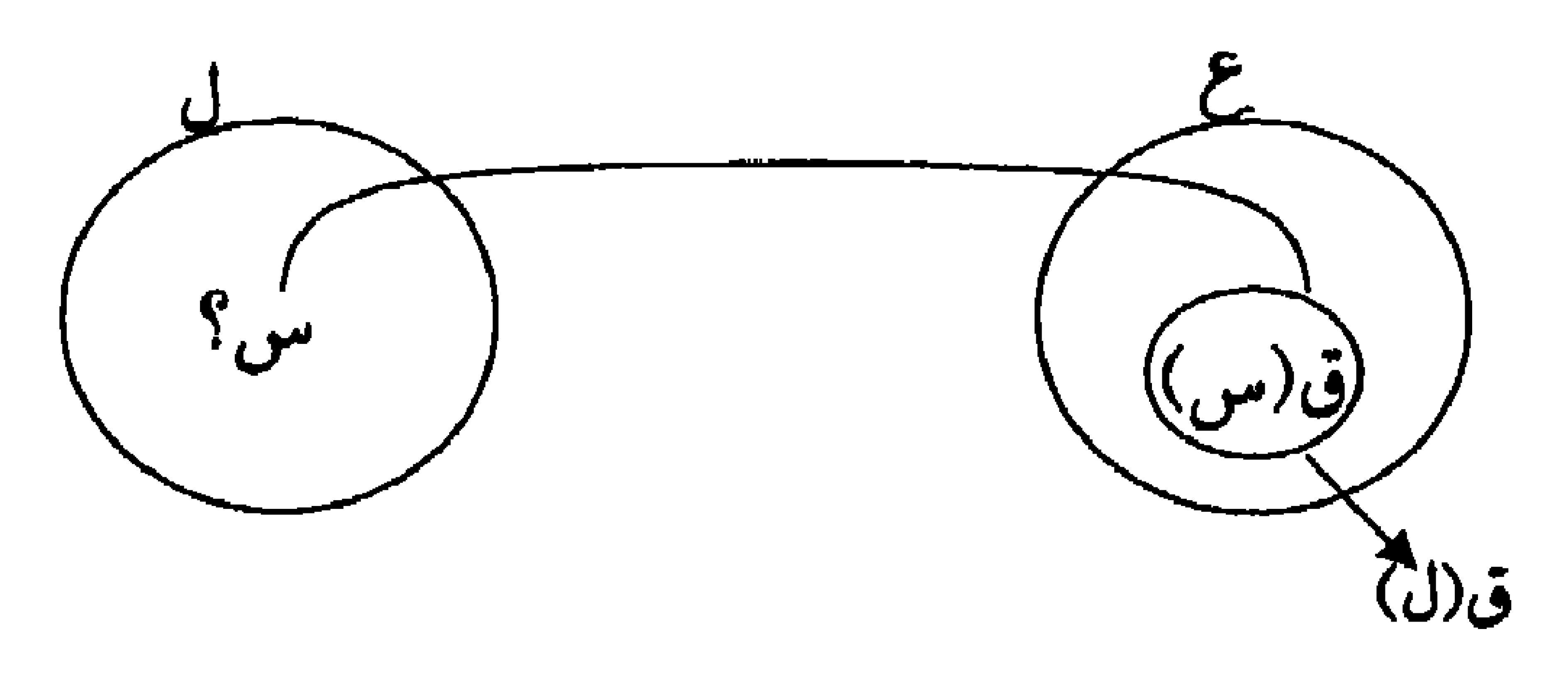
تعريف: على اعتبار أن المجموعتين ل، ع المعرفتين على حقل الأعداد الحقيقية ح وأن كلاً من هاتين المجموعتين هو فضاء متجهه فإذا حققنا الشرطين التاليين.

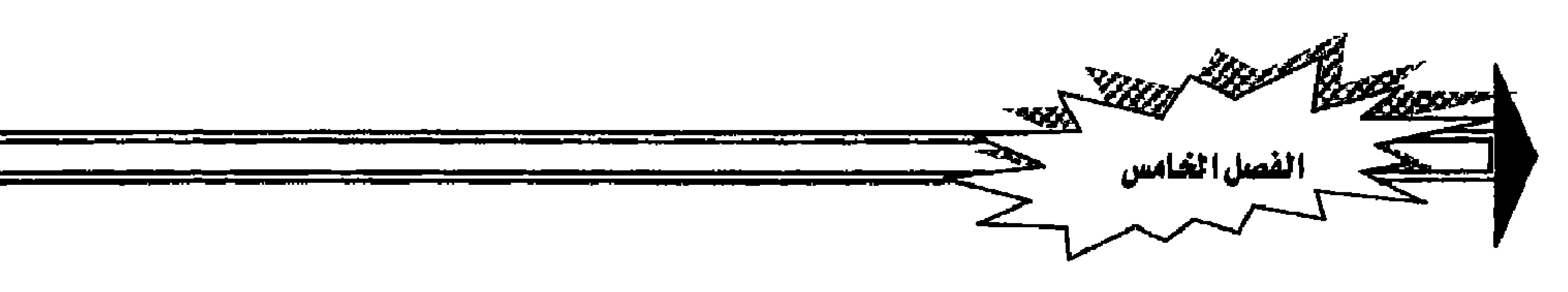
١- ∀ س⃖، ص⃖ ∈ ل ⇐ ق(س⃖ + ص⃖) = ق(س⃖) + ق(ص⃖)

٢- ∀ س⃖ ∈ ل، جـ ∈ ح ⇐ ق(ك، س⃖)

فالاقتران المعرف ق: ل ⟵ ع

يسمى بالتحويل الخطي وهو موضح في الشكل (١)





مثال (١):

لدينا الاقتران ق(س)= ٢س-١

معرف على النحو ق: ح ⟵ ح بين أن الاقتران ليس تحويلاً خطياً.

الحل:

لكون ∀ س، ص ∈ ح^{٢} ⟸ ق(س)= ٢س-١، ق(ص)= ٢ص-١

ثم نبدأ بتحقيق شروط التحويل الخطي.

١- ق(س) + ق(ص)= ٢س-١ + ٢ص-١

ق(س+ص)= ٢س+ ٢ص-١

وبما أن:

ق(س+ص) ≠ ق(س) + ق(ص)

∴ الاقتران ق ليس تحويلاً خطياً.

مثال (٢): ليكن لدينا الاقتران ق المعرف على النحو:

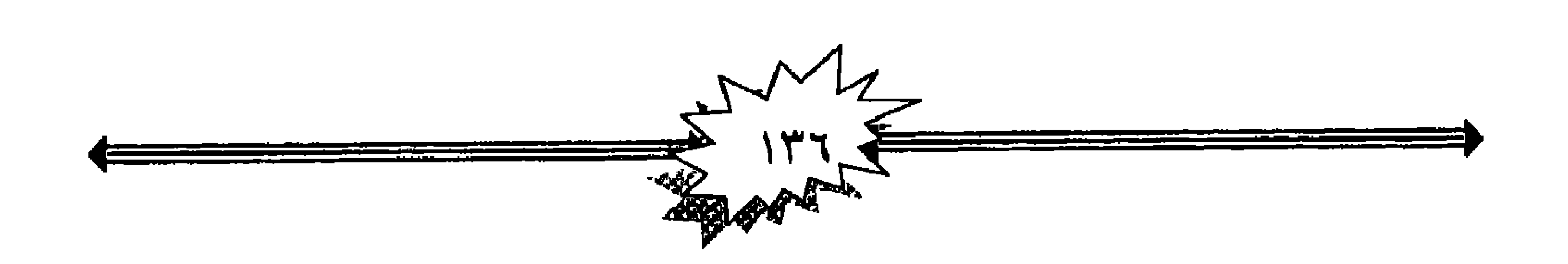
ق: ح^{٢} ⟵ ح^{٢}، ق(س$_{١}$، س$_{٢}$)= (٢س$_{١}$ – ٣س$_{٢}$، س$_{٢}$)

بين أن الاقتران ق هو تحويلاً خطياً.

الحل:

ليكن: ∀جـ ∈ ح، ص= (ص$_{١}$، ص$_{٢}$) ، س= (س$_{١}$، س$_{٢}$) ∈ ح^{٢}

نتحقق من الشروط أعلاه:



١- $\forall$ س، ص $\in$ ح^{٢} $\Longleftarrow$ ق(س+ص)= ق(س) + ق(ص)

$\Longleftarrow$ ق(س+ص)= ق(س$_{١}$ + ص$_{١}$، س$_{٢}$+ص$_{٢}$)

$\Longleftarrow$ (٢س$_{١}$ + ٢ص$_{١}$ − ٣س$_{٢}$ − ٣ص$_{٢}$،س$_{٢}$ + ص$_{٢}$)

ق(س)= ق(س$_{١}$، س$_{٢}$)= (٢س$_{١}$ − ٣س$_{٢}$، س$_{٢}$)

ق(ص)= ق(ص$_{١}$، ص$_{٢}$)= (٢ص$_{١}$-٣ص$_{٢}$، ص$_{٢}$)

$\Longleftarrow$ ق(س) + ق(ص)= (٢س$_{١}$-٣س$_{٢}$ + ٢ص$_{١}$-٣ص$_{٢}$، س$_{٢}$ + ص$_{٢}$)

نلاحظ أن

ق(س+ص)= ق(س) + ق(ص)

وهذا هو الشرط الأول للتحويل الخطي.

نبدأ بتحقيق الشرط الثاني

٢- ق(جـ.س)= جـ. ق(س)

ق(جـ.س)= ق(جـ س$_{١}$، جـ س$_{٢}$)= (٢جـ س$_{١}$-٣جـ س$_{٢}$، جـ س$_{٢}$)

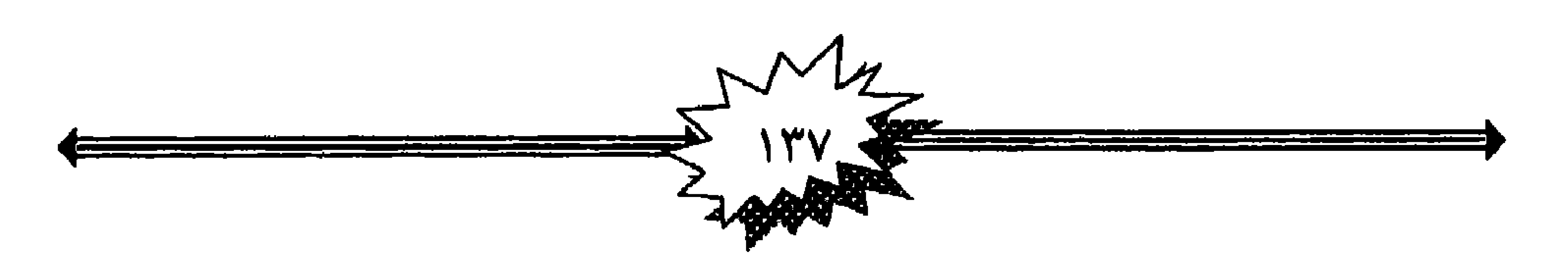
= جـ (٢س$_{١}$ − ٣س$_{٢}$، س$_{٢}$)= جـ . ق(س)

ولتحقيق الشرطين السابقين فإن الاقتران ق هو تحويل خطي.

ومن المفيد طرح النظريات التالية في التحويلات الخطية لتعميق هذا المفهوم.

نظرية (١): إذا كان ل، ع فضائي متجهين فإن الاقتران ق: ل$\longrightarrow$ ع.

يسمى تحويلاً خطياً إذا حقق الخاصية التالية:



$$\text{ق}\left(\text{م}.\overleftarrow{\text{س}}+\text{هـ}.\overleftarrow{\text{ص}}\right)=\text{م}.\text{ق}\left(\overleftarrow{\text{س}}\right)+\text{هـ}\,\text{ق}\left(\overleftarrow{\text{ص}}\right)$$ حيث $\text{م}،\text{هـ}\in\text{ح}$، $\overleftarrow{\text{س}}،\overleftarrow{\text{ص}}\in\text{ل}$

البرهان:

١- إذا كان ق يحقق الخاصية $\text{ق}\left(\text{م}.\overleftarrow{\text{س}}+\text{هـ}.\overleftarrow{\text{ص}}\right)=\text{م}\,\text{ق}\left(\overleftarrow{\text{س}}\right)+\text{هـ}\,\text{ق}\left(\overleftarrow{\text{ص}}\right)$

نأخذ م = هـ = ١ فيكون $\text{ق}\left(\overleftarrow{\text{س}}+\overleftarrow{\text{ص}}\right)=\text{ق}\left(\overleftarrow{\text{س}}\right)+\text{ق}\left(\overleftarrow{\text{ص}}\right)$

وإذا أخذنا هـ = ٠ فيكون $\text{ق}\left(\text{م}\overleftarrow{\text{س}}\right)=\text{م}.\text{ق}\left(\overleftarrow{\text{س}}\right)$

وبذلك نكون حققنا الشروط التي يجب توفرها حتى يكون ق تحويلاً خطياً.

٢- وإذا كان ق تحويلاً خطياً فباستعمال الخاصية الأولى من التعريف يكون:

$$\text{ق}\left(\text{م}.\overleftarrow{\text{س}}+\text{هـ}.\overleftarrow{\text{ص}}\right)=\text{ق}\left(\text{م}\overleftarrow{\text{س}}\right)+\text{ق}\left(\text{هـ}\overleftarrow{\text{ص}}\right)$$

$$=\text{م}.\text{ق}\left(\overleftarrow{\text{س}}\right)+\text{هـ}\,\text{ق}\left(\overleftarrow{\text{ص}}\right)$$

وذلك باستخدام الخاصية الثانية ويتم المطلوب.

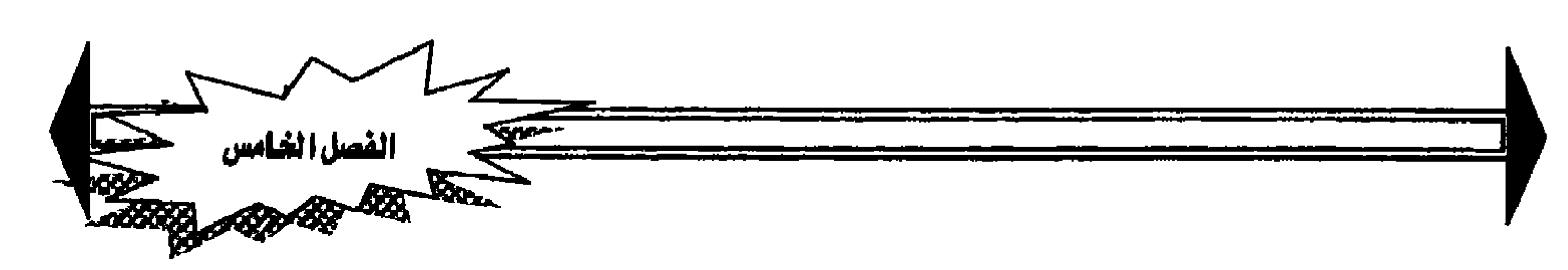
مثال (٣): ليكن لدينا الاقتران المعرف على النحو التالي:

ق: $\text{ح}^{3}\longrightarrow\text{ح}^{3}$ ، ق(س، ص، ١)= (ص، ١، س)

والمطلوب إثبات أن ق تحويل خطي.

الحل:

لإثبات أن ق تحويل خطي نفرض أن:



$\overleftarrow{أ}$ = (س١، ص١، و١)، $\overleftarrow{ب}$ = (س٢، ص٢، و٢)

ثم نبدأ بتحقيق الشروط التي يجب توفرها حتى يصبح ق تحويل خطي.

١- ق$\left(\overleftarrow{أ}+\overleftarrow{ب}\right)$ = ق(س١ + س٢، ص١ + ص٢، و١ + و٢)

= (ص١ + ص٢، و١ + و٢، س١ + س٢)

= (ص١، و١، س١) + (ص٢، و٢، س٢)

ق$\left(\overleftarrow{أ}\right)$+ق$\left(\overleftarrow{ب}\right)$

أي أن الشرط الأول قد تحقق والآن نعمل على تحقيق الشرط الثاني.

٢- ق$\left(م.\overleftarrow{أ}\right)$ = ق(م س١، م ص١، م و)= (م ص١، م و١، م س١)

=مق$\left(\overleftarrow{أ}\right)$

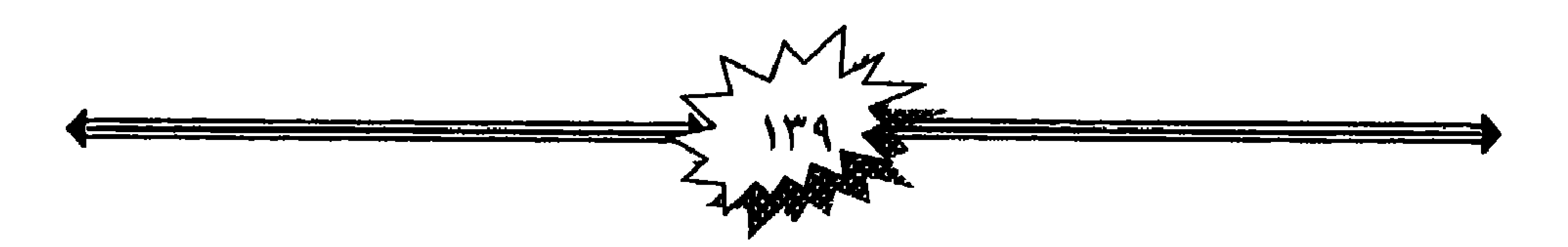
وهذا يعني أن ق هو تحويل خطي.

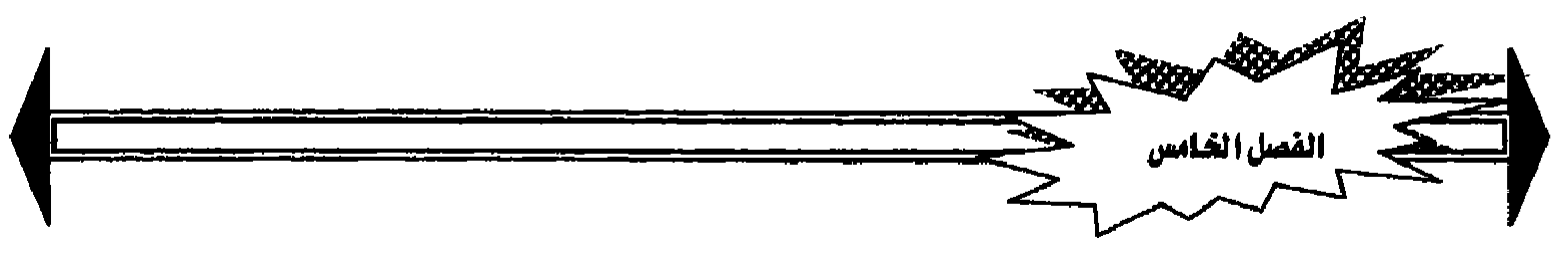
التحويل الخطي الصفري Zero trausform

تعريف (٢): ليكن ل، ع فضائين متجهين وليكن الاقتران ق اقتراناً معرفاً على النحو التالي:

ق: ل ⟵ ع، ق$\left(\overleftarrow{أ}\right)$=٠، ∀ $\overleftarrow{أ}$∋$\overleftarrow{ل}$

فإن ق يسمى تحويلاً خطياً وهذا التحويل يسمى بالتحويل الصفري.





مثال (٤): أثبت أن التحويل الصفري تحويلاً خطياً.

الحل:

حتى نثبت أن التحويل الصفري تحويلاً خطياً فلا بد من تحقيق الشروط السابقة نلاحظ أن:

$ق\left(\overleftarrow{أ}\right)=٠،\ ق\left(\overleftarrow{ب}\right)=٠،\ ق\left(\overleftarrow{أ}+\overleftarrow{ب}\right)=٠،\ ق\left(م\ \overleftarrow{أ}\right)=٠$

١- $ق\left(\overleftarrow{أ}+\overleftarrow{ب}\right)=\left(\overleftarrow{أ}\right)+ق\left(\overleftarrow{ب}\right)=٠+٠=٠$

وعليه فإن الشرط الأول متحقق

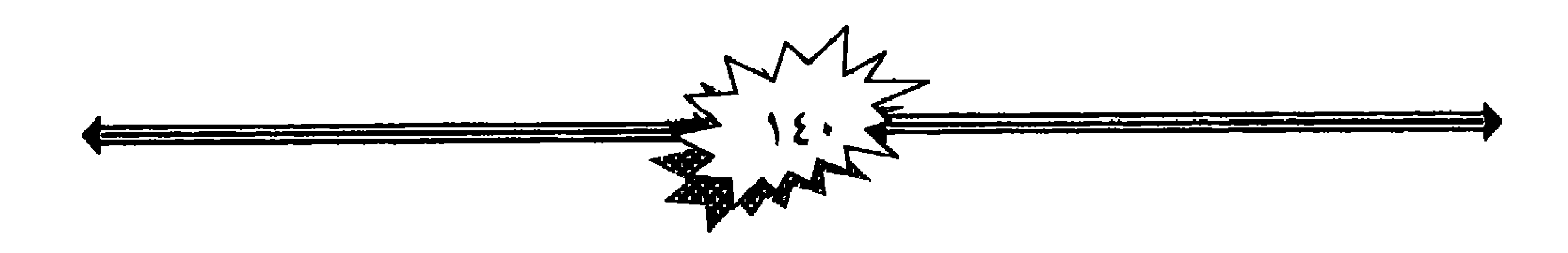
٢- $ق\left(م.\overleftarrow{أ}\right)=م ق\left(\overleftarrow{أ}\right)=م.(٠)=٠$

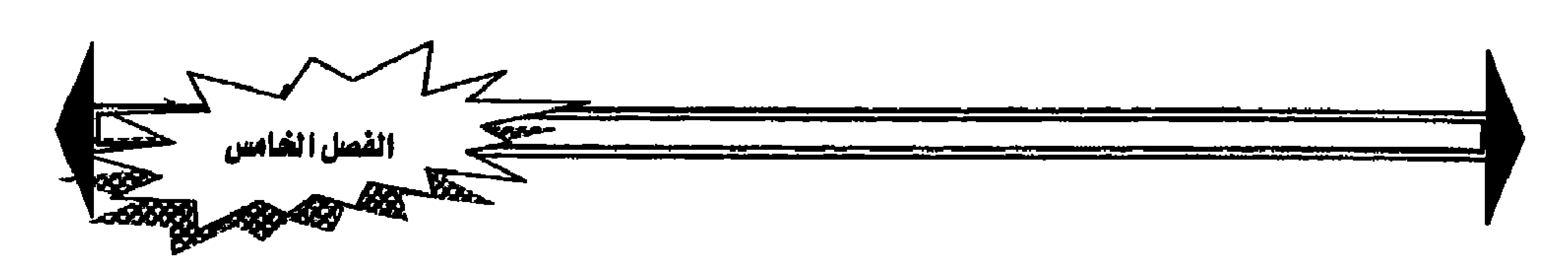
∴ الشرط الثاني متحقق وبالتالي فإن التحويل الصفري هو تحويل خطي.

مدى نواة التحويل الخطي:

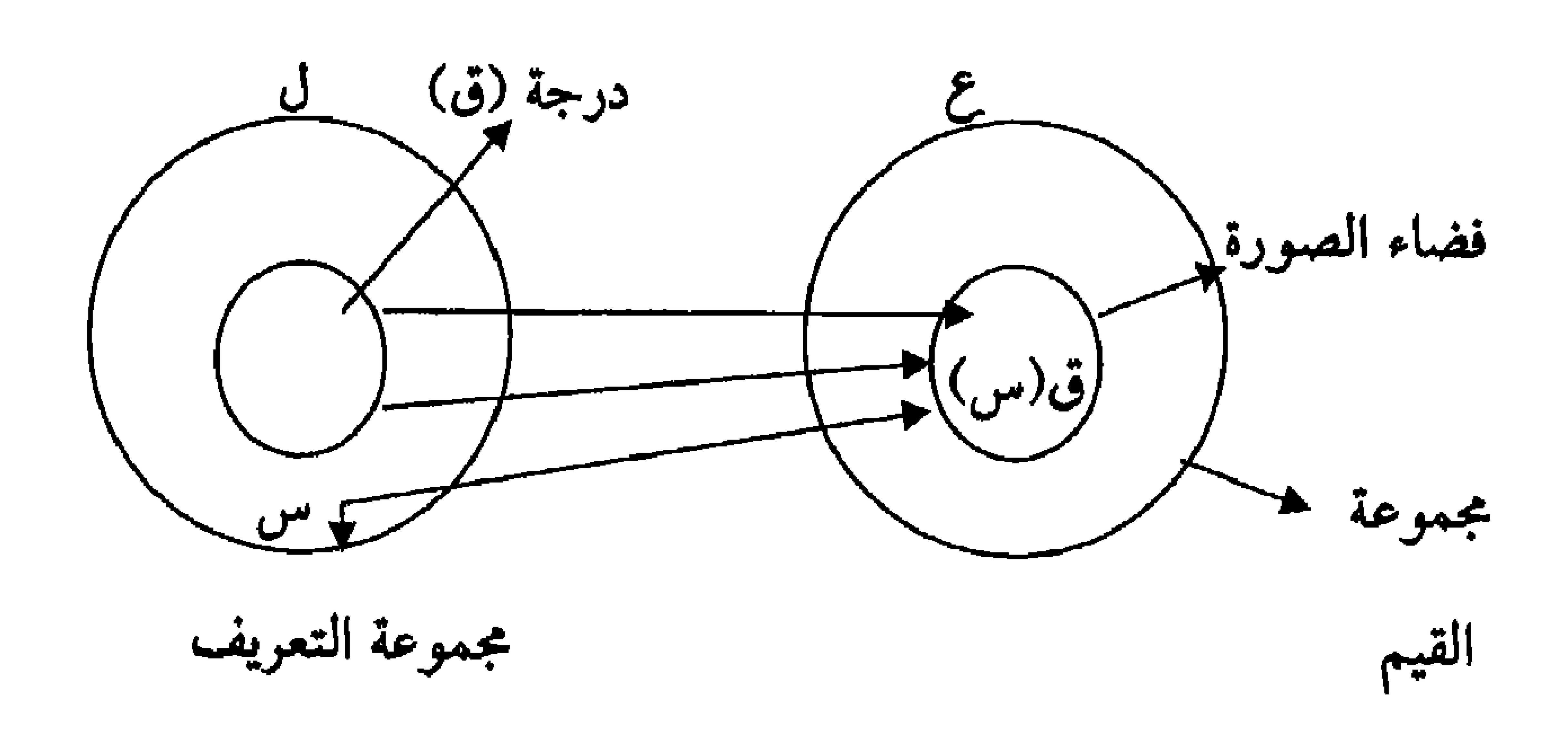
تعريف (٣): ليكن ل، ع فضائي متجهين معرفين على حقل الأعداد الحقيقية ح وليكن ق: ل ⟵ ع تحويلاً خطياً وليكن $\overleftarrow{٠}$، $\overleftarrow{٠}$ متجهات صفرية لفضائي المتجهين ل، ع على التوالي، تسمى المجموعة التي تكون عناصر المتجه الصفري والتي هي صورة فضاء المتجه ل بنواة التحويل الخطي ق (درجة (ق)) وبصيغة الرموز فإن النواة تكتب على النحو التالي:

ك= درجة (ق)= {س: س ∋ ل، ق(س)= $\overleftarrow{٠}$} ، ق(ل)= {ق(س): س ∋ ل}





حيث أن المجموعة الأولى هي مجموعة صورة التحويل الخطي بينما المجموعة الثانية هي صورة فضاء المتجه ل والشكل (٢) يوضح ذلك.



شكل (٢)

ملاحظات:

١- إن المجموعة ك= درجة (ق) هي مجموعة فضاء متجه جزئي من الفضاء المتجه ل

٢- إذا كان درجة (ق)= ك= $\{\overleftarrow{0}\}$

فإن التحويل الخطي ق تقابل وعكس هذه العبارة صحيح.

٣- اتجاه (ل)= اتجاه (درجة (ق)) + اتجاه (ق (ل))

مثال (٥): أوجد نواة التحويل الخطي المعرف على النحو التالي:

ق: $ح^{٢} \longrightarrow ح^{٣}$ ، ق(س$_{١}$، س$_{٢}$)= (س$_{١}$، س$_{١}$ + س$_{٢}$، ٢س$_{٢}$)



الحل:

من تعريف نواة التحويل الخطي فإن:

درجة (ق)= {(س$_1$، س$_2$): ق(س$_1$، س$_2$)= (٠، ٠، ٠)

وعليه إذا كـان س$_1$، س$_1$+س$_2$، ٢س$_2$)= (٠، ٠، ٠) $\Longleftarrow$ س$_1$= ٠، س$_1$ + س$_2$ = ٠، ٢س$_2$=٠

ومن هنا نجد أن س$_1$= س$_2$= ٠

لذا فإن نواة التحويل الخطي المطلوب

ك= {(٠، ٠)}

مثال (٦): لدينا التحويل الخطي ق: ح^2 ⟵ ح^2

والمعرف بالقاعدة ق(س، ص)= (٢س-٢ص، س-ص)

أوجد:

أ- الفضاء الصفري

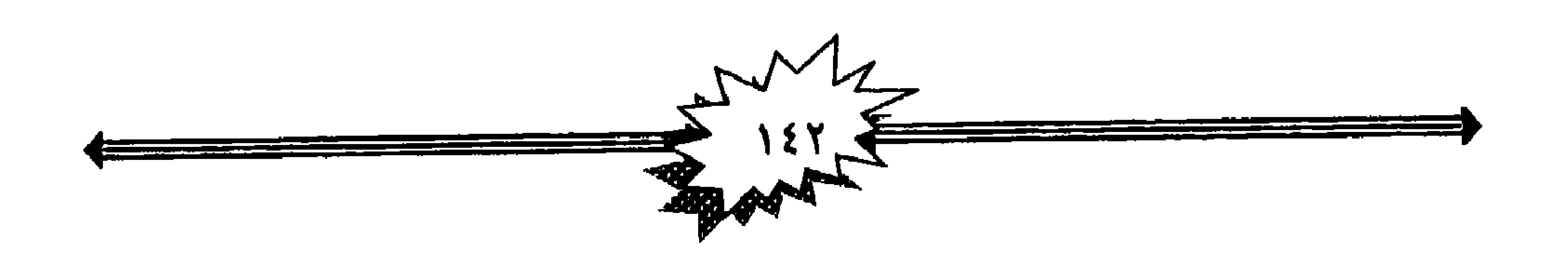
ب- فضاء الصورة لهذا التحويل

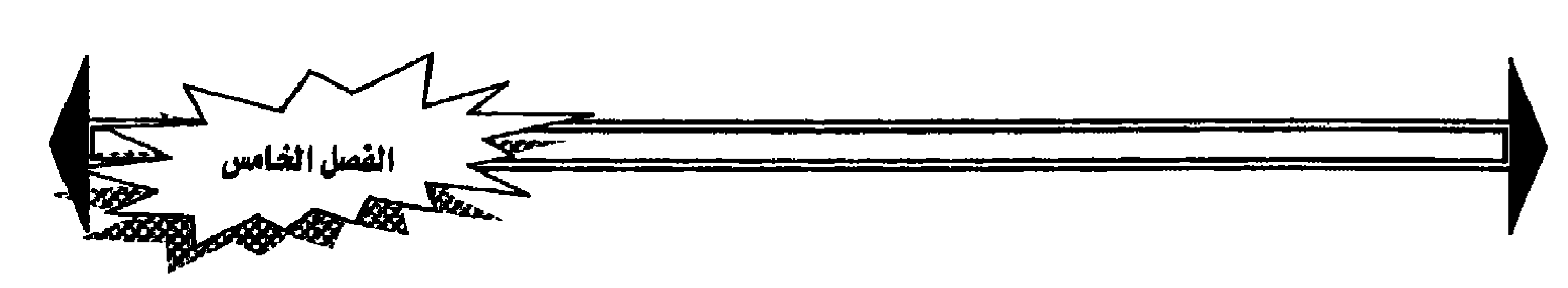
الحل:

أ- لإيجاد الفضاء الصفري فإنه يتوجب أن يكون ق(س، ص)= (٠، ٠)

وعليه:

(٢س-٢ص، س-ص)= (٠، ٠) $\Longleftarrow$ ٢س-٢ص= ٠ $\Longleftarrow$ س=ص





أو س-ص= ٠ ⟸ س=ص

وعليه فإن نواة ق أي درجة (ق)= {(س، س): س ∈ ح}

أي أن الفضاء الصفري هو ١ وهو المستقيم المنصف للزاوية.

ب- أن فضاء صورة التحويل الخطي ق هو:

ق(ح^{٢})= {٢س-٢ص، س-ص): س، ص ∈ ح}

= (س-ص) . (٢، ١) وذلك بإخراج عامل مشترك

وبوضع س-ص= ﻫ فإننا نستطيع كتابة العلاقة أعلاه على النحو:

(٢س-٢ص، س-ص)= ﻫ (٢، ١)

وعليه فإن فضاء الصورة:

ق(ح^{٢})= ﻫ(٢، ١): ﻫ ∈ ح} = {(٢ﻫ، ﻫ): ﻫ ∈ ح} = {(٢س، س): س ∈ ح}

= {(س، ص): ص= $\frac{١}{٢}$س، س ∈ ح}

يعني أن فضاء الصورة هو الخط المستقيم ص= $\frac{١}{٢}$س.

مصفوفة التحويلات الخطية:

إذا كانت صورة المتجهات الأساسية

$\overleftarrow{هـ}_{١}$= (١، ٠، ....، ٠)، $\overleftarrow{هـ}_{٢}$= (٠، ١، ٠، ....، ٠)، ......، $\overleftarrow{هـ}_{ن}$= (٠، ٠، ......، ١)





والتي تمثل قاعدة الفضاء الاتجاهي $ح^{ن}$ في التحويل الخطي ق: $ح^{ن} \longrightarrow ح^{م}$

وتحت تأثير الاقتران ق هي $ق\left(\overleftarrow{هـ}_{١}\right)، ق\left(\overleftarrow{هـ}_{٢}\right)، .....، ق\left(\overleftarrow{هـ}_{ن}\right)$

معرفة فإن ق(س) معرف أيضاً

وحسب التحويل الخطي ق: $ح^{ن} \longrightarrow ح^{م}$

وعلى اعتبار أن س= (س١، س٢، ... ، سن) ∈ $ح^{ن}$

فإن صورة المتجه

$$\overleftarrow{س} = \overleftarrow{س}_{١} . \overleftarrow{هـ}_{١} + \overleftarrow{س}_{٢} . \overleftarrow{هـ}_{٢} + ... + \overleftarrow{س}_{ن}\, \overleftarrow{هـ}_{ن}$$

تحت تأثير التحويل ق هي

$$ق\left(\overleftarrow{س}\right) = س_{١}\, ق\left(\overleftarrow{هـ}_{١}\right) + س_{٢}\, ق\left(\overleftarrow{هـ}_{٢}\right) + ... + س_{ن}\, ق\left(\overleftarrow{هـ}_{ن}\right)$$

ويمكن كتابة الشكل أعلاه على النحو:

$$ق\left(\overleftarrow{هـ}_{١}\right) = ق(١، ٠، ٠، .....، ٠) = (أ_{١١}، أ_{١٢}، .... أ_{م١})$$

$$ق\left(\overleftarrow{هـ}_{٢}\right) = ق(٠، ١، ٠، .....، ٠) = (أ_{٢١}، أ_{٢٢}، .... أ_{م٢})$$

. . .

. . .

. . .

. . .

$$ق\left(\overleftarrow{هـ}_{ن}\right) = ق(٠، ٠، \ldots، ١) = (أ_{١ن}، أ_{٢ن}، \ldots، أ_{من})$$

$$ق(س) = س_{١}\begin{bmatrix} أ_{١١} \\ أ_{١٢} \\ \ldots \\ أ_{م١} \end{bmatrix} + س_{٢}\begin{bmatrix} أ_{٢١} \\ أ_{٢٢} \\ \ldots \\ أ_{م٢} \end{bmatrix} + \ldots + س_{ن}\begin{bmatrix} أ_{١ن} \\ أ_{٢ن} \\ \ldots \\ أ_{من} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ_{١١}س_{١} + أ_{٢١}س_{٢} + \ldots + أ_{١ن}س_{ن} \\ أ_{١٢}س_{١} + أ_{٢٢}س_{٢} + \ldots + أ_{٢ن}س_{ن} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ أ_{م١}س_{١} + أ_{م٢}س_{٢} + \ldots + أ_{من}س_{ن} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \ldots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \ldots & أ_{٢ن} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & \ldots & أ_{من} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س_{١} \\ س_{٢} \\ \ldots \\ س_{ن} \end{bmatrix}$$

$$ق\left(\overleftarrow{هـ}_{١}\right) \quad ق\left(\overleftarrow{هـ}\right) \ldots ق\left(\overleftarrow{هـ}_{ن}\right)$$

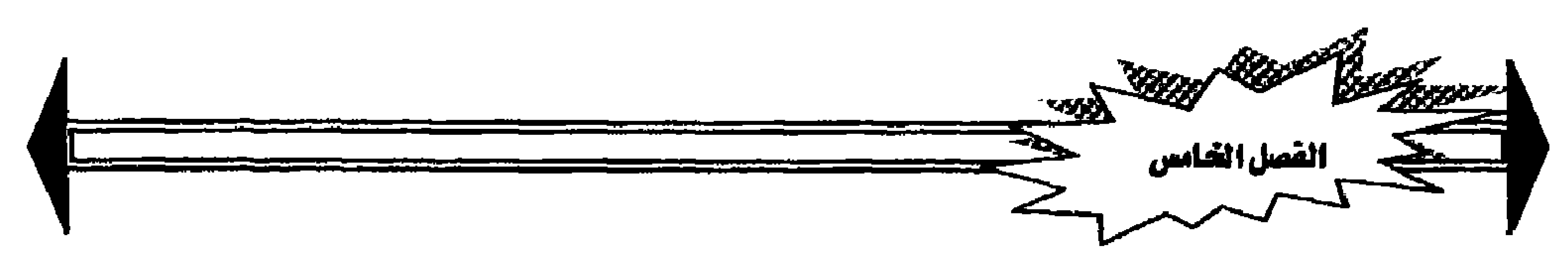
ونسمي المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \ldots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \ldots & أ_{٢ن} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & \ldots & أ_{من} \end{bmatrix}$ بمصفوفة التحويل الخطي للتحويل ق.

ملاحظات:

١- في التحويل الخطي ق: $ح^{ن} \longrightarrow ح^{م}$

يمثل عدد الأعمدة في مصفوفة التحويل الخطي بعد أو الطول ن في $ح^{ن}$ ويمثل عدد السطور في مصفوفة التحويل الخطي بعد أو الطول م في $ح^{م}$.





٢- باستخدام مصفوفة التحويل أ للتحويل ق: $ح^ن \longrightarrow ح^م$

نستطيع إيجاد صورة أي متجه $\overleftarrow{س}$ في $ح^ن$ وذلك باستخدام قاعدة ضرب المصفوفات أي $ق\left(\overleftarrow{س}\right) = أ\left(\overleftarrow{س}\right)$

٣- في مصفوفة التحويل الخطي ق: $ح^ن \longrightarrow ح^م$

إن عناصر العمود الأول ما هي إلا معاملات $س_١$ في التحويل الخطي كذلك عناصر العمود الثاني هي معاملات $س_٢$ وهكذا فإن عناصر العمود النوني هو معاملات $س_ن$.

مثال (٧): لدينا التحويل الخطي المعرف على النحو ق: $ح^٢ \longrightarrow ح^٣$

بالقاعدة ق($س_١$، $س_٢$)= (٢$س_١$− $س_٢$، $س_١$− $س_٢$، ٣$س_١$ + ٤$س_٢$)

أوجد مصفوفة التحويل لهذا التحويل الخطي.

الحل:

المصفوفة المطلوبة هي $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ١- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

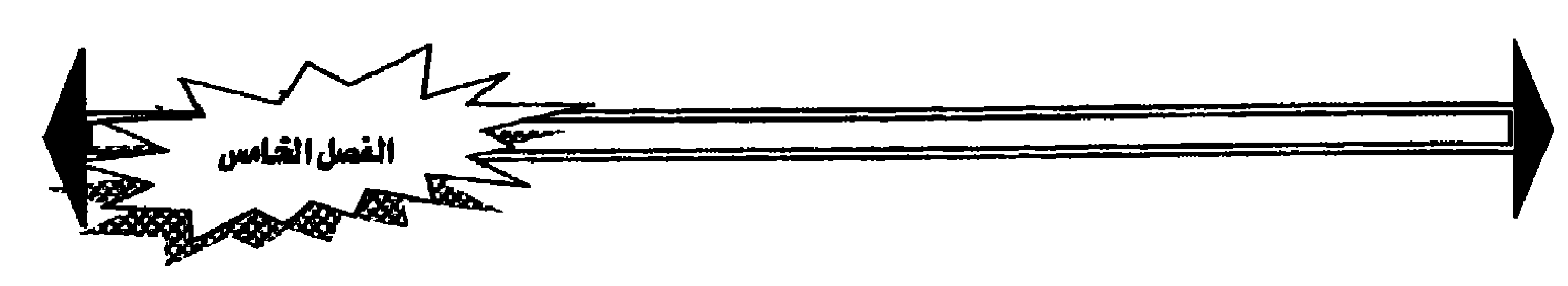
تعريف (٤): أن رتبة المصفوفة للتحويل الخطي هي نفسها رتبة التحويل الخطي ق.

مثال (٨): لدينا التحويل الخطي ق: $ح^٣ \longrightarrow ح^٣$

معرف بالقاعدة ق($س_١$، $س_٢$، $س_٣$) = ($س_١$، $س_١$ + $س_٢$، $س_٢$ − $س_٣$)

أوجد رتبة هذا التحويل الخطي.





الحل:

بالاستفادة من الملاحظة أعلاه والملاحظات السابقة نكون أولاً مصفوفة التحويل الخطي وذلك بعد أن نضع قاعدة التحويل على الصورة

ق(س$_1$، س$_2$، س$_3$) = (١س$_1$، (٠) س$_2$ + (٠) س$_3$، ١. س$_1$ + ١. س$_2$ + (٠) س$_3$، (٠) س$_1$ + ١س$_1$ - ١س$_3$)

ثم نكون مصفوفة التحويل التالية:

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١- \end{bmatrix}$$

أن رتبة هذه المصفوفة هي رتبة (أ)= ٣ وهذه الرتبة هي رتبة التحويل الخطي المعطى.

ملاحظة: إن رتبة التحويل لفضاءات المتجهات ق: ل ⟵ ع هو بعد (طول) الفضاء المعطى (عدد المتجهات المكونة للفضاء المعطى).

مثال (٩): لدينا التحويل الخطي المعرف على النحو ق: ح^٣ ⟵ ح^٣

بالقاعدة ق(س، ص، ع)= (٢س، ص+ ع، س-ص+ع)

أوجد مصفوفة التحويل الخطي لهذا التحويل.

الحل:

هناك طريقتان لتكوين مصفوفة التحويل الخطي:

أ- باستخدام صور متجهات قاعدة الفضاء حيث أنها تمثل أعمدة مصفوفة



التحويل على النحو التالي:

ق($\overleftarrow{هـ}_{١}$)= ق(١، ٠، ٠) = (٢، ٠، ١)

ق($\overleftarrow{هـ}_{٢}$)= ق(٠، ١، ٠)= (٠، ١، -١)

ق($\overleftarrow{هـ}_{٣}$)= ق(٠، ٠، ١)= (٠، ١، ١)

وعليه تصبح مصفوفة التحويل المطلوبة أ= $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$

ب- نضع قاعدة التحويل على الصورة

ق(س، ص، ع)= (٢.س + (٠) ص+ (٠) ع، (٠)س + (١) ص+ ١.ع ١.س - ١.ص + ١.ع)

ثم نأخذ معاملات المتغيران لتكون صفوف مصفوفة التحويل الخطي.

أ= $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ١ \end{bmatrix}$

مثال (١٠): على اعتبار أن مصفوفة التحويل للتحويل ق: ح^{٢} ⟵ ح^{٣}

هو أ= $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ أوجد قاعدة التحويل.

أ- على اعتبار أن س= (س$_{١}$، س$_{٢}$) ∈ ح^{٢}

ومن كون ق(س)= أ. س فإن:

$$ق(س) = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س_١ \\ س_٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س_١ - س_٢ \\ ٢س_١ + ٣س_٢ \\ ٤س_١ \end{bmatrix}$$

وهذه القاعدة نكتبها على النحو التالي:

$ق(س_١، س_٢) = (س_١ - س_٢، ٢س_١ + ٣س_٢، ٤س_١)$

ب- نعرف أن عناصر العمود الأول هي معاملات $س_١$ في مركبات القاعدة وكذلك عناصر العمود الثاني هي معاملات $س_٢$ في مركبات القاعدة لتصبح على النحو:

$ق(س_١، س_٢) = (١س_١ - ١س_٢، ٢س_١ + ٣س_٢، ٤س_١ + (٠). س_٢)$

$= (س_١ - س_٢، ٢س_١ + ٣س_٢، ٤س_١)$

وهي القاعدة المطلوبة.

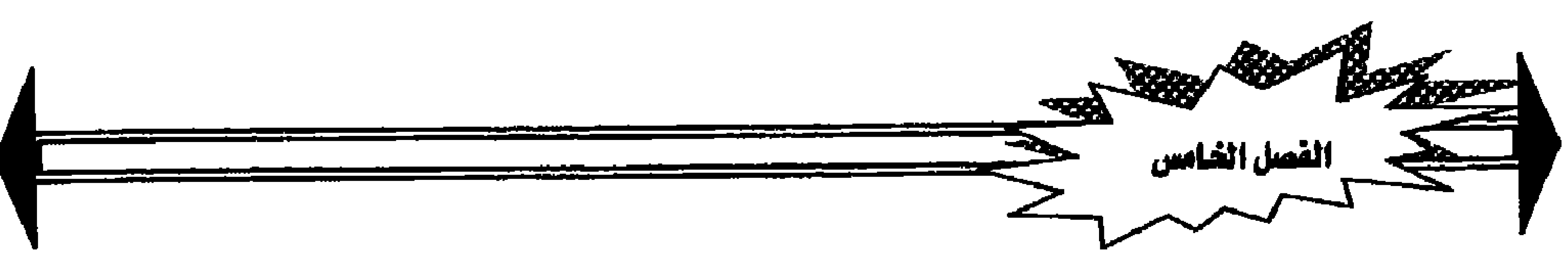
مثال (١١): لدينا مصفوفة التحويل ق: $ح^٢ \longrightarrow ح^٢$

وهي

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$ **أوجد صورة المتجه $\overleftarrow{س} = (٢، -١)$ تحت تأثير التحويل ق.**

الحل:

هناك طريقتان لحل مثل هذه الأسئلة.



أ- نجد الصورة بالطريقة المباشرة وباستخدام مصفوفة التحويل ولكون

ق(س)=أ.$\overleftarrow{س}$

نجد أن:

$$ق(٢،-١)=\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ -١ & ٠\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}٢\\ -١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١\\ -٢\end{bmatrix}=(١،-٢)$$

ب- من مصفوفة التحويل أ= $\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ -١ & ٠\end{bmatrix}$

نجد قاعدة التحويل ق(س$_{١}$، س$_{٢}$)= (٢س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$، -س$_{١}$)

ثم نجد صورة المتجهة وفق القاعدة أعلاه

ق(٢، -١) = (٢، ٢+٣ (-١)، -٢)= (١، -٢) وهو المطلوب.

العمليات على التحويلات الخطية

جميع التحويلات الخطية: ليكن لدينا فضائي المتجهين ل، ع معرفين على حقل الأعداد الحقيقية ح

بالتحويل ق: ل ⟵ ع ، ك: ل ⟵ ع

ولنعرف هـ(س)= ق(س) + ك(س)، ∀س ∈ ل

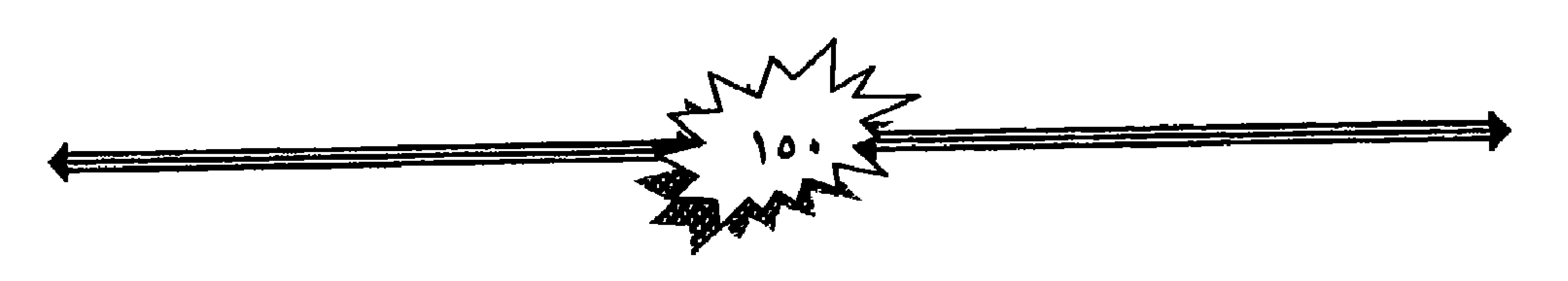
فإننا نسمي هـ(س) مجموع التحويلين.

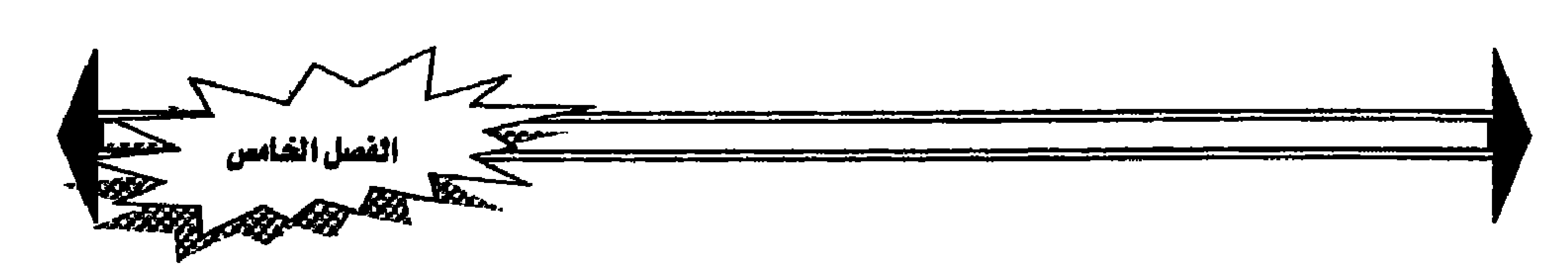
مثال (١٢): ليكن لدينا التحويلين ق: ح^{٢} ⟵ ح^{٣} ، ك: ح^{٢} ⟵ ح^{٣}

المعرفين بالقاعدتين ق(س$_{١}$، س$_{٢}$)= (س$_{١}$ + س$_{٢}$، س$_{١}$ - س$_{٢}$ ، س$_{٢}$)

ك(س$_{١}$، س$_{٢}$)= (٢س$_{١}$ - س$_{٢}$، س$_{١}$، ٣س$_{١}$ + س$_{٢}$)

أوجد (ق+ك) (س$_{١}$، س$_{٢}$)





الحل:

(ق+ك) $(س_1،س_2)$= $(س_1 + س_2 + 2س_1 - س_2 ، س_1 - س_2 + س_1،$
$س_2 + 3س_1 + س_2)$

$= (3س_1، 2س_1 - س_2، 3س_1 + 2س_2)$

ضرب التحويل الخطي في عدد ثابت:

ليكن لدينا التحويل ق: ل ⟵ ع

حيث ل، ع فضائين متجهين معرفين على حقل الأعداد الحقيقية

∀س ∈ ل، أ ∈ ح ⟸ ك(س)= أ. ق(س)

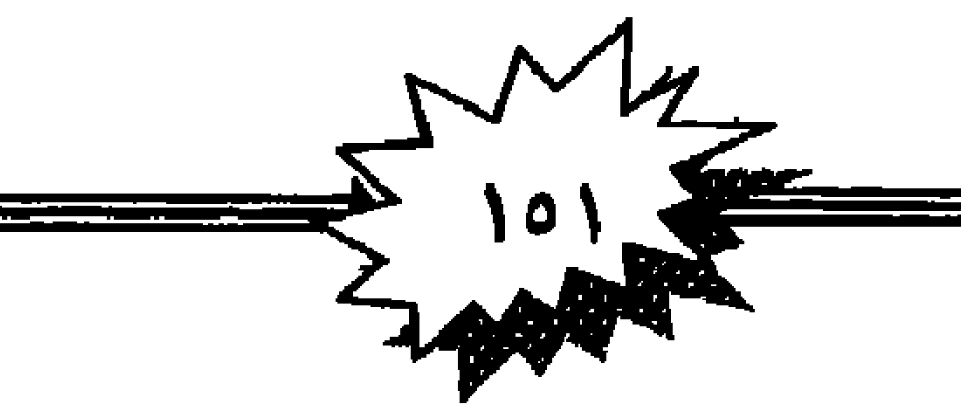
فنسمي التحويل المنتج ك بأنه تحويل حاصل ضرب عدد حقيقي في تحويل خطي.

مثال (١٣): ليكن لدينا ق: $ح^2$ ⟵ $ح^2$

والمعرف بالقاعدة ق(س، ص)= (س-٢ص، س+٣ص) أوجد ناتج -٢ق(س، ص)

الحل:

-٢ق(س، ص)= -٢[(س-٢ص، س+٣ص)] = (-٢س+٤ص، -٢س -٦ص)





تركيب التحويلات الخطية:

ليكن لدينا التحويلين ق: ل ⟵ ع ، ك: ع ⟵ م

حيث ل، ع، م ثلاث فضاءات متجه على حقل الأعداد الحقيقية ح

∀س ∈ ل ⟸ ق ○ ك: ل ⟵ م، (ك ○ ق) (س)= ك(ق(س))

فنسمي (ك ○ ق) (س) تركيب تحويلين خطي.

مثال (١٤): ليكن لدينا التحويلين ق: $ح^٢$ ⟵ $ح^٣$ ، ك: $ح^٢$ ⟵ $ح^٢$

معرفين بالقاعدتين ق($س_١$، $س_٢$)= ($س_١$+$س_٢$، −$س_١$، $س_٢$)

ك ($س_١$، $س_٢$، $س_٣$) = ($س_١$ + $س_٢$−$س_٣$، $س_٣$−$س_١$)

أوجد (ك ○ ق) (٢، ١)

الحل:

(ك ○ ق) (٢، ١)= ك[ق(٢، ١)] = ك[(٢+١، −٢، ١)]= ك(٣، −٢، ١)
= (٣−٢−١، ١−٣) = (٠، −٢)

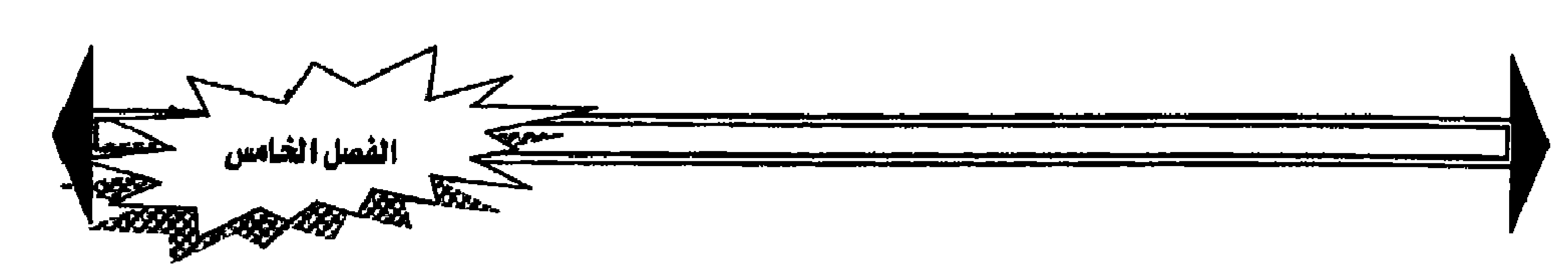
ملاحظة: ليكن لدينا التحويلات الخطية ق: ل ⟵ ع ، ك: ع ⟵ م

حيث ل، ع، م ثلاثة فضاءات متجه معرفة على حقل الأعداد الحقيقية فإذا كانت مصفوفة التحويل للتحويل ق هي أ، وللتحويل ك هي ب بينما للتحويل هـ هي جـ فإن:

١− مصفوفة التحويل للتحويل ق + ك هي أ + ب

٢− مصفوفة التحويل لتركيب تحويلين جـ. أ.





٣- $\forall$ ن $\in$ ح فإن مصفوفة التحويل للتحويل ن ق هي ن . م.

التحويلات الهندسية في المستوى

هناك العديد من التحويلات الهندسية سنتناول أهم هذه التحويلات

نظراً لأهمية هذه التحويلات في كثير من المواضيع الرياضية والهندسية من أهمها:

الانسحاب:

تعريف (٥): ليكن المتجه $\overleftarrow{أ}$ = (م١، م٢)

هو متجه ثابت في المستوى ح^{٢} وعلى اعتبار أن الاقتران المعرف ق($\overleftarrow{س}$)=$\overleftarrow{س}$+$\overleftarrow{أ}$

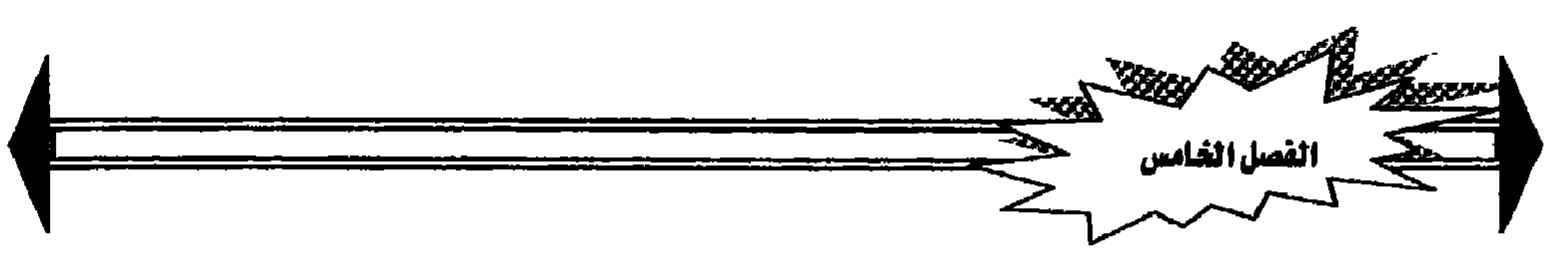
فإننا نقول للاقتران ق: ح^{٢} $\longrightarrow$ ح^{٢} بأنه تحويل انسحاب ونقول للمتجه $\overleftarrow{أ}$

بأنه متجه الانسحاب وسنرمز لتحويل الانسحاب بالرمز ق($\overleftarrow{س}$)=$\overleftarrow{س}$+$\overleftarrow{أ}$

وحسب التعريف فإن $ق_{أ}$($\overleftarrow{س}$)=$\overleftarrow{س}$+$\overleftarrow{أ}$ = ($س_{١}$، $س_{٢}$) + ($م_{١}$، $م_{٢}$)= ($س_{١}$ + $م_{١}$، $س_{٢}$ + $م_{٢}$)

وبقول آخر إن صورة النقطة ن($س_{١}$، $س_{٢}$) تحت تأثير انسحاب مقداره المتجه $\overleftarrow{أ}$ هو النقطة و($س_{١}$+ $م_{١}$، $س_{٢}$ + $م_{٢}$).





تعريف (٦): إذا كان $\overleftarrow{أ} = \theta$ = (٠، ٠) فإنه يقال لتحويل الانسحاب قθ بانسحاب الوحدة وتصبح صورة كل نقطة في المستوى هي النقطة نفسها.

مثال (١٥): لدينا متجه الانسحاب $\overleftarrow{أ}$ = (٢، ٥) فلأي متجه يحول $ق_{أ}$ المتجه $\overleftarrow{س}$= (-٢، ٣) في المستوى.

الحل:

كما نعلم من أعلاه وحسب التعريف فإن:

$ق_{\overleftarrow{أ}}(\overleftarrow{س}) = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{أ}$ = (-٢، ٣) + (٢، ٥) = (٠، ٥)

مثال (١٦):

في المستوى ق: $ح^{٢} \longrightarrow ح^{٢}$ وكان متجه الانسحاب $\overleftarrow{أ}$ = (-١، ٣) وكان تحويل الانسحاب معطى على النحو التالي:

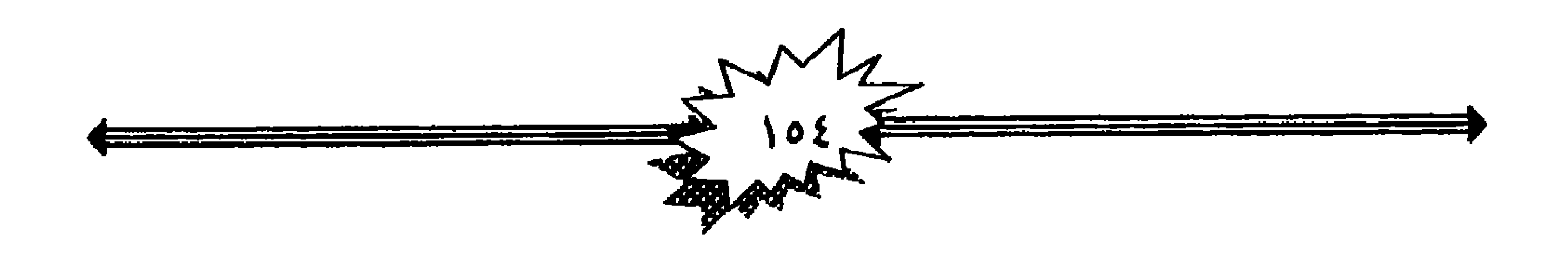
$ق_{أ}(\overleftarrow{س}) = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{أ}$ أوجد معادلة صورة المستقيم ٣س-٤ص+١= ٠ تحت تأثير تحويل الانسحاب أعلاه.

الحل:

لنأخذ $\overleftarrow{س}$ = (س،ص)، $ق_{أ}\left(\overleftarrow{س}\right) = \overleftarrow{س'}$ =(سَ، صَ)

وحسب التعريف فإن $ق_{أ}(\overleftarrow{س}) = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{أ}$ = (س، ص) + (-١، ٣)

= (س-١، ص+ ٣) = (سَ، صَ)



$\Leftarrow$ س−١ = سَ $\Leftarrow$ س = سَ+١، ص+٣ = صَ $\Leftarrow$ ص = صَ−٣

وبالتعويض عن قيم س، ص في المعادلة الأصلية نحصل على صورة المعادلة وعليه فإن صورة المعادلة تصبح على النحو:

٣س−٤ص+١ = ٠ $\Leftarrow$ ٣(سَ + ١) − ٤(صَ−٣) + ١ = ٠

مثال (١٧): لدينا ق: ح^{٢} $\longrightarrow$ ح^{٢} ، ق(س$_{١}$، س$_{٢}$)= (س$_{١}$ + ٢، س$_{٢}$−١) والمطلوب:

أ- إثبات أن ق هو تحويل انسحاب.

ب- إثبات أن المسافة بين النقطتين $\overleftarrow{\text{ن}}$ = (٣، ٢) ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ = (٠، ١)

تساوي المسافة بين صور النقاط تحت تأثير هذا الانسحاب.

الحل:

أ- يمكن كتابة التحويل على الصورة ق(س$_{١}$، س$_{٢}$)= (س$_{١}$ + ٢، س$_{٢}$−١)= (س$_{١}$، س$_{٢}$) + (٢، −١)

وإذا أخذنا $\overleftarrow{\text{س}}$ = (س$_{١}$، س$_{٢}$) ، $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢، −١)

نستطيع كتابة الصيغة التالية ق$\left(\overleftarrow{\text{س}}\right)$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{أ}}$ أي أن اقتران التحويل هو انسحاب.

ب- نجد أولاً المسافة بين النقطتين $\overleftarrow{\text{ن}}$ = (٣، ٢)، $\overleftarrow{\text{ك}}$ = (٠، ١)

من قانون المسافة في المستوى ف $= \sqrt{(٥-٢)^{٢} + (١-٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$





ثم نجد صور ن، ك تحت تأثير التحويل ق على النحو.

$$ق\left(\overleftarrow{ن}\right) = ق(٣، ٢) = (٣+٢، ٢-١) = (٥، ١)$$

$$ق\left(\overleftarrow{ك}\right) = ق(٠، ١) = (٠+٢، ١-٧) = (٢، ٠)$$

وعليه فالمسافة بين النقطتين نَ، كَ هي $فَ = \sqrt{(٥-٢)^٢ + (١-٠)^٢} = \sqrt{١٠}$

نلاحظ أن ف = فَ وهو المطلوب.

خصائص الانسحاب

١- تحويل الانسحاب ليس تحويلاً خطياً.

٢- تحويل الانسحاب يحافظ على الأطوال وقياس الزوايا.

٣- تحويل الانسحاب يحول القطعة المستقيمة إلى قطعة مستقيمة موازية للأولى والدائرة إلى دائرة والزاوية إلى زاوية أي أنه يحافظ على الشكل.

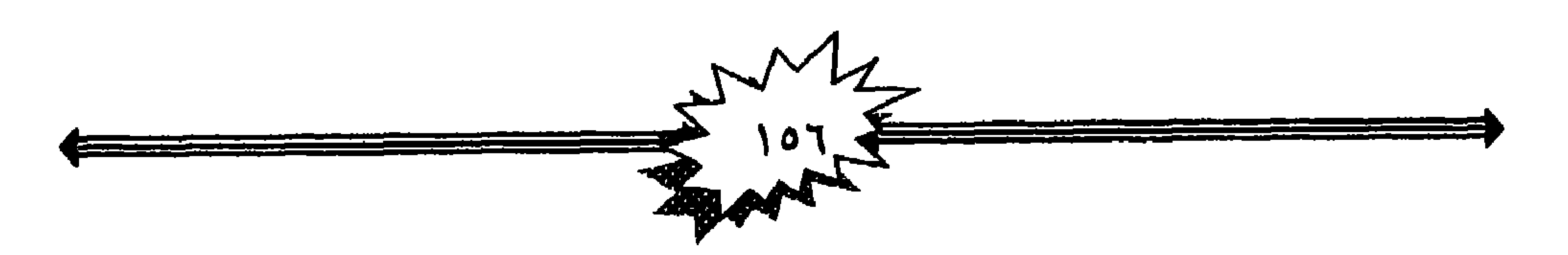
٤- تركيب انسحابين انسحاب أيضاً وبصيغة الرموز فإنه في المستوى $ح^٢$.

$$ق_{\overleftarrow{أ}}(\overleftarrow{س}) = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{أ}،$$

$$ق_{\overleftarrow{ب}}(\overleftarrow{س}) = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ب} \Leftarrow \left(ق_{\overleftarrow{أ}} o ق_{\overleftarrow{ب}}\right)\left(\overleftarrow{س}\right) = ق_{\overleftarrow{أ}+\overleftarrow{ب}}(\overleftarrow{س}) = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$$

إزاحة (انسحاب) الإحداثيات

ليكن متجه الانسحاب $\overleftarrow{أ} = (أ_١، أ_٢)$ في المستوى $ح^٢$ ولو قلنا أن انسحاب المحور س وفق تحويل الانسحاب هو المحور سَ الموازي للمحور س وكذلك

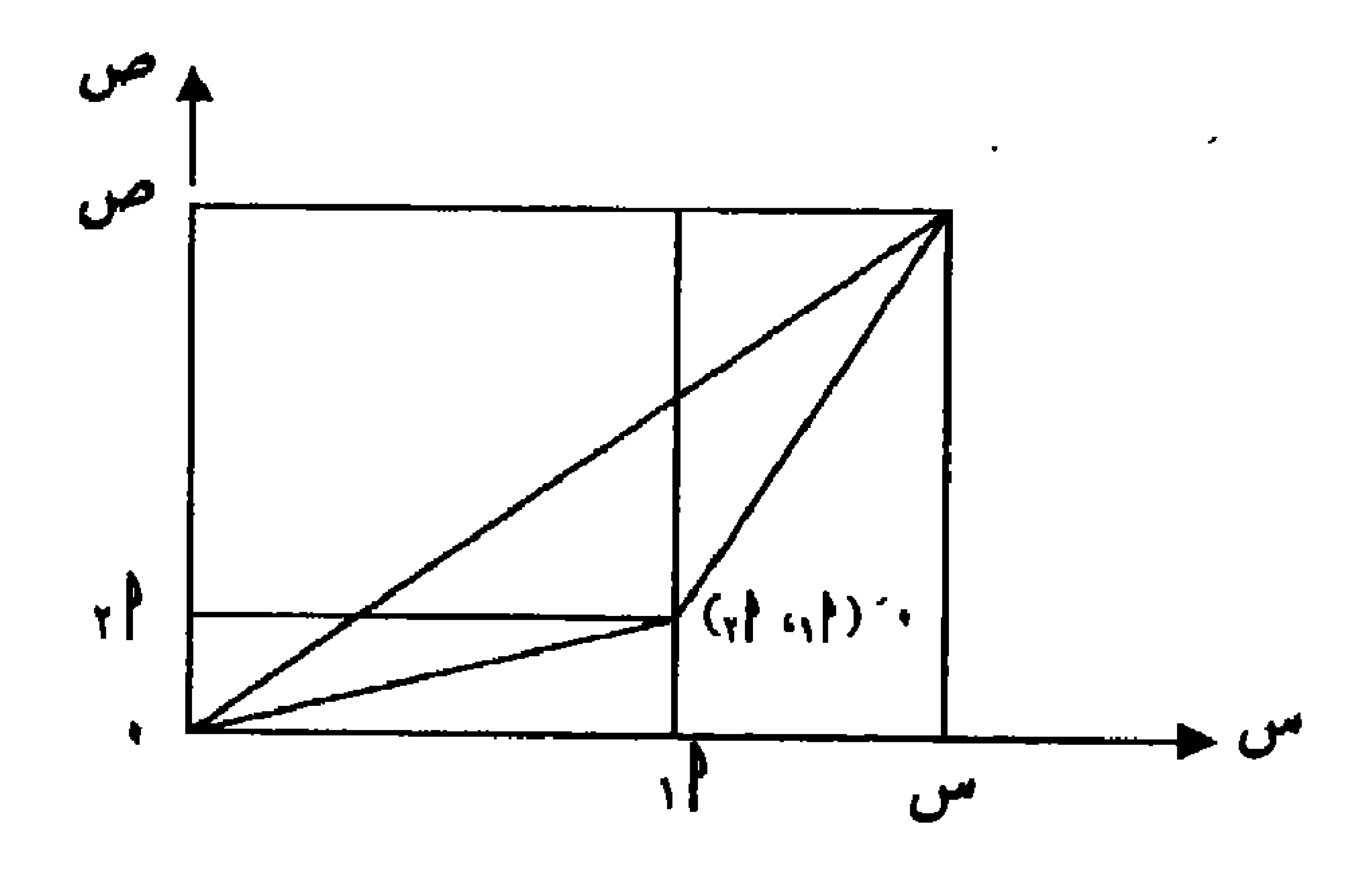


المحور ص صورته للمحور صَ الموازي للمحـور ص ونقطـة الأصـل ٠ (٠، ٠) وفق هذا التحول هي ٠َ وتصبح على النحو:

٠َ = ق(٠)= أ⃖ + ٠⃖ = (أ١، أ٢) + (٠، ٠)= (أ١، أ٢)

وعليه فإن نظام الإحـداثيات (س ○ ص) يـصبح وفـق التحويـل قأ هـو (سَ ○ صَ) وصورة النقطة ن(س، ص) في النظام الإحداثي س ○ ص تـصبح في النظام الإحداثي الجديد (سَ ○ صَ) النقطة نَ (س- أ١، ص-أ٢)

كما تبدو في الشكل (٣)



مثال (١٨): أ⃖ = (-١-٤)، ب⃖ = (٢-٣)

متجهي انسحاب والمطلوب إيجاد صورة النقطة ن(٥، ٢) تحت تـأثير تحويـل تركيب الانسحابين قب○قأ

الحل:

لكون $\left(ق_{ب} \circ ق_{أ}\right)(\overleftarrow{س}) = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$ فإن صورة النقطة ن هي

$ق_{ب} \circ ق_{أ}$ (٥، ٢)= (٥، ٢) + (-١، ٤) + (٢، -٣)= (٥-١+ ٢،٢+٤-٣)= (٦، ٣)

مثال (١٩): دائرة معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

إذا سحبت المحاور الإحداثية بمقدار المتجه $\overleftarrow{أ}$ = (-٤، ٣) أوجد معادلة الدائرة وفق المحاور الإحداثية الجديدة.

الحل:

إذا سحبت المحاور الإحداثية س $\circ$ ص بمقدار المتجه $\overleftarrow{أ}$ فإن المحاور الإحداثية الناتجة هي سَ $\circ$ صَ فإذا كانت النقطة ن(س، ص) تقع على الدائرة التي محاورها الإحداثية س $\circ$ ص ولتكن الإحداثيات لهذه النقطة في النظام سَ $\circ$ صَ هي نَ (س، ص) ولكون

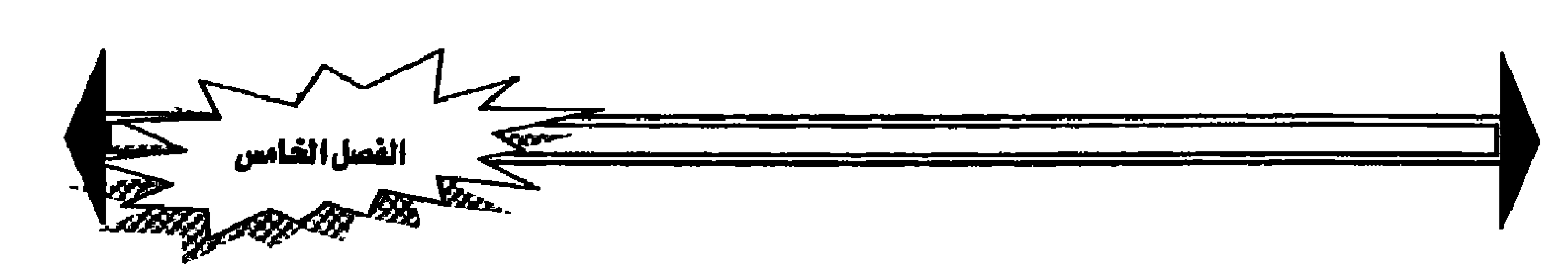
$س = س + أ_{١} = س - ٤$

$ص = ص + أ_{٢} = ص + ٣$

وإذا ما وضعت هذه القيم في أماكنها في معادلة الدائرة:

$(س-٤)^{٢} + (ص+٣)^{٢} = ١٦ \Longrightarrow س^{٢} + ص^{٢} - ٨س + ٦ص + ٩ = ٠$

تحويل الدوران



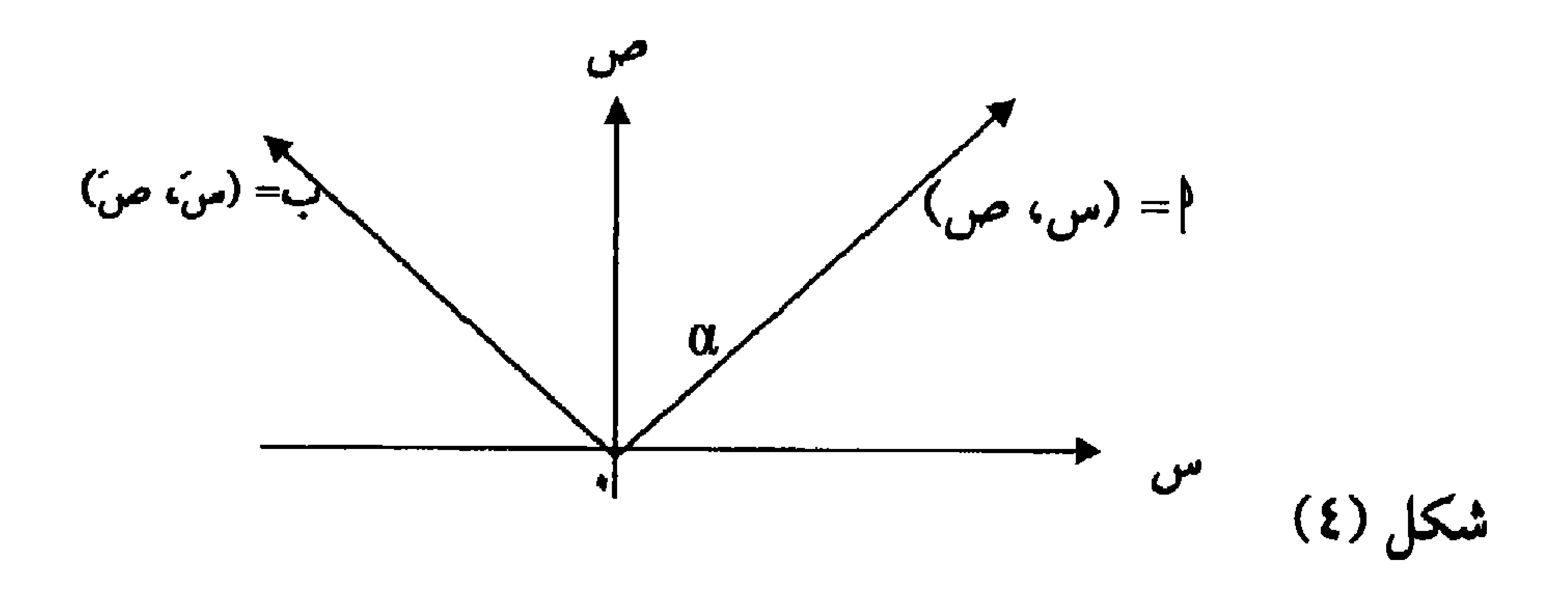
تعريف (٧): ليكن لدينا α ($\cdot \le \alpha \le 2\pi$) عدد حقيقي.

أ(س، ص)، ب (سَ، صَ) نقطتين في المستوى وعلى اعتبار أن

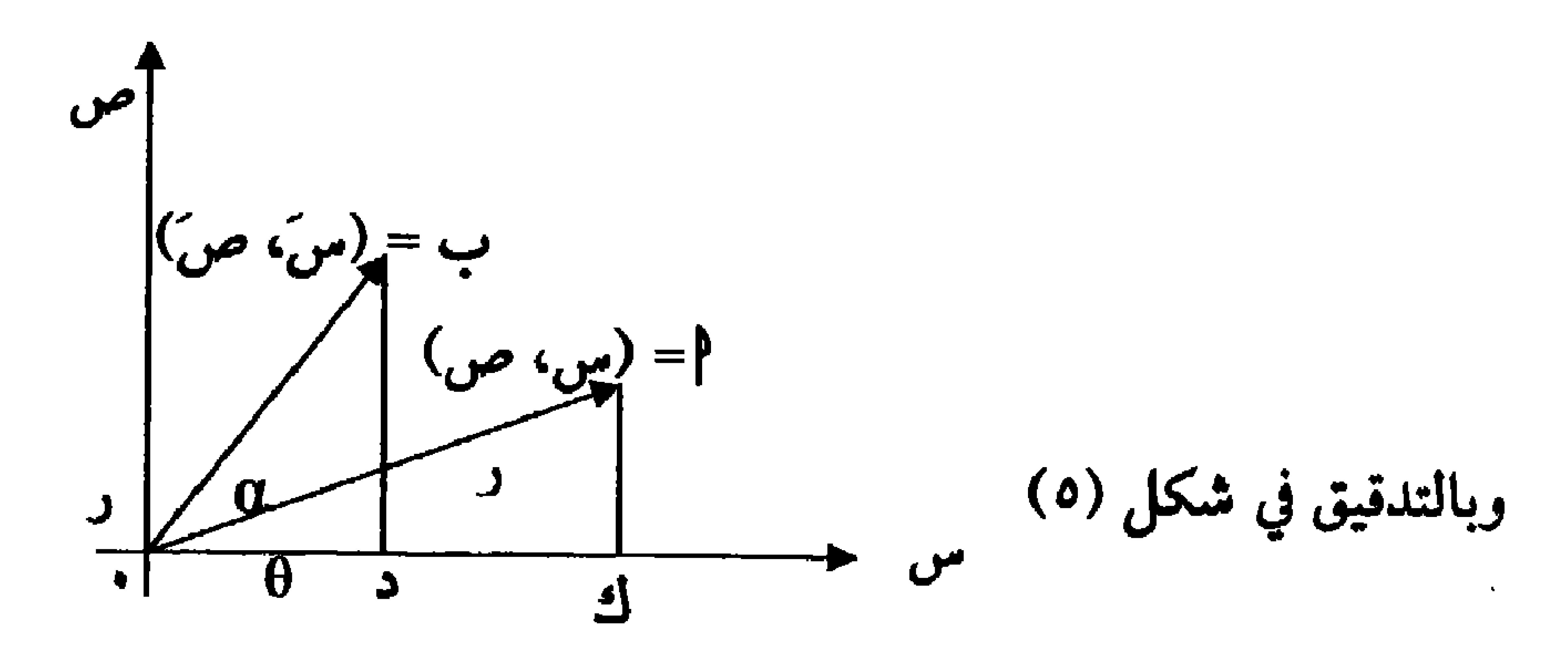
|و أ| = |و ب|= م (أ $\hat{o}$ ب)= α

نسمي التحويل المعرف على النحو د$_\alpha$(أ)= ب، د$_\alpha$: ح^2 ⟵ ح^2

بتحويل الدوران للنقطة أ بزاوية قدرها α راديان حول نقطة الأصل (٠) لتكون صورتها النقطة ب وهذا واضح على الشكل (٤).

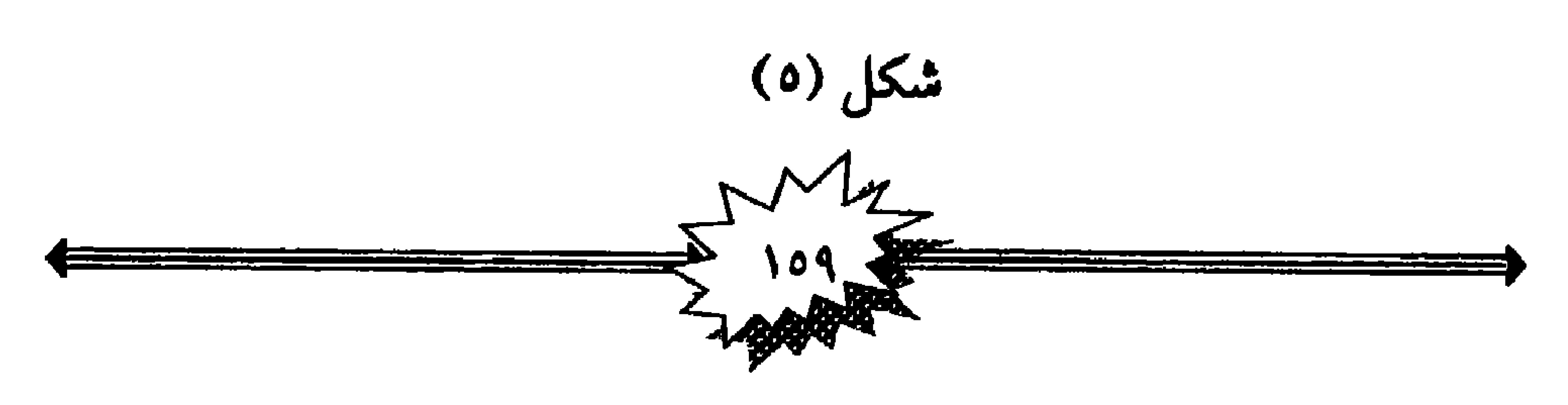


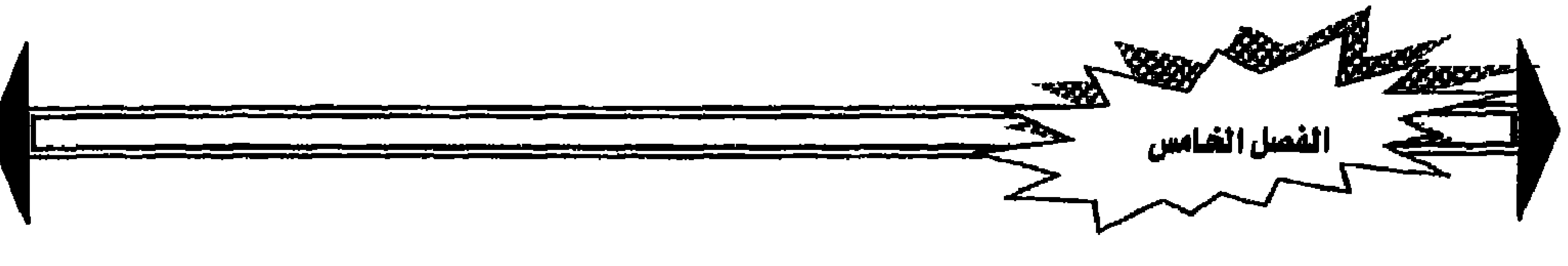
شكل (٤)



وبالتدقيق في شكل (٥)

شكل (٥)





نجد أن:

سَ= |○ب| جتا $(\alpha+\theta)$= ر. جتا $(\infty+\theta)$= ر جتا α . جتا θ − ر جـا α . جا θ

صَ= |○ب| جا$(\alpha+\theta)$= ر. جا α جتا α + ر جتا α جا θ

س= |○أ| جتا θ = ر جتا θ، ص= |○أ| جا θ = ر جا θ

وبوضع هذه القيم في أماكنها أعلاه نحصل على

سَ= س. جتا α − ص.جا α ، صَ= س جا α + ص جتا α

ويمكن التعبير عن المعادلتين أعلاه بصيغة المصفوفات على النحو:

$$\begin{bmatrix} سَ \\ صَ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} جتا\alpha & -جا\alpha \\ جا\alpha & جتا\alpha \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$ وتصبح مصفوفة التحويل للدوارن

$$د_{\alpha}=\begin{bmatrix} جتا\alpha & -جا\alpha \\ جا\alpha & جتا\alpha \end{bmatrix}$$

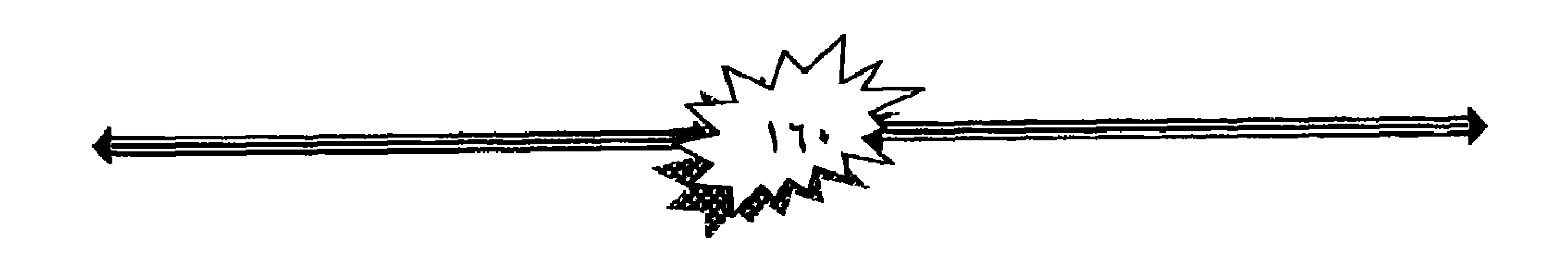
مثال (٢٠): لدينا تحويل الدوران حول نقطة الأصل (٠) بزاوية دوران $\frac{\pi}{٣}$

والمطلوب إيجاد $د_{\frac{\pi}{٣}}$

أ- مصفوفة التحويل للدوران.

ب- صورة النقطة ن(٠، ٢) تحت تأثير هذا الدوران.

ج- معادلة الصورة للخط المستقيم الذي معادلته ٢س + ص= ٥ تحت تـأثير هذا الدوران



الحل:

أ- إن مصفوفة الدوران $د_{\frac{\pi}{3}}$ هي:

$$أ = \begin{bmatrix} \text{جتا}\frac{\pi}{3} & -\text{جا}\frac{\pi}{3} \\ \text{جا}\frac{\pi}{3} & \text{جتا}\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ب- إن إحداثيا النقطة بَ (سَ، صَ)

هي $ق(\overleftarrow{س}) = د_{\frac{\pi}{3}}\overleftarrow{س}$ وتكون صورة النقطة ن(٠، ٢)

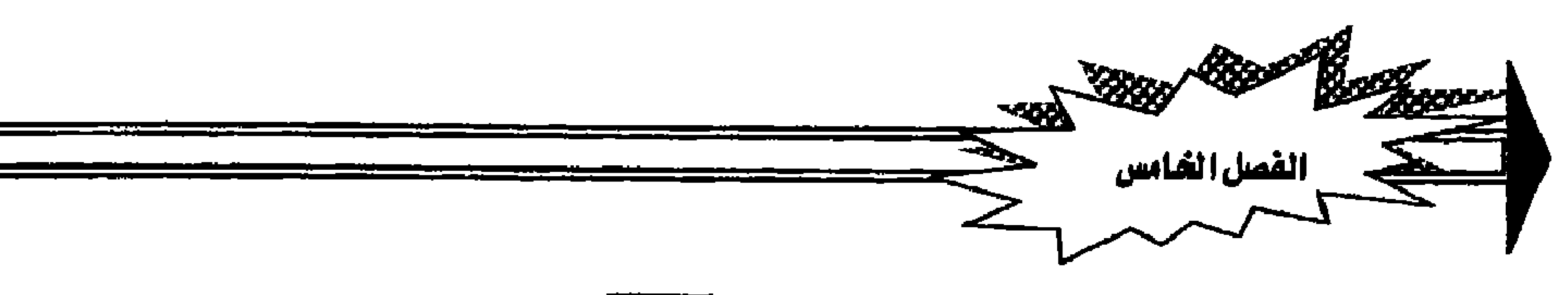
$$\begin{bmatrix} سَ \\ صَ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = (-\sqrt{3}, 1)$$

يعني $صَ = \frac{\sqrt{3}س}{2} + \frac{ص}{2}$

جـ- لتكن النقطة ك(س، ص) نقطة واقعة على المستقيم ٢س + ص= ٥ ولتكن صورة النقطة تحت تأثير تحويل الدوران هي كَ(سَ، صَ) ومن كون أن $سَ = -\sqrt{3}$، $صَ = 1$

$$\begin{bmatrix} سَ \\ صَ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{س}{2} - \frac{\sqrt{3}ص}{2} \\ \frac{\sqrt{3}س}{2} + \frac{ص}{2} \end{bmatrix} \Leftarrow سَ = \frac{س}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ص$$

بالاستفادة من المعادلتين أعلاه نجد أن:



$$\text{س} = \frac{\text{سَ} + \sqrt{3}\,\text{صَ}}{2} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{-3\,\text{سَ} + \sqrt{3}\,\text{صَ}}{2\sqrt{3}}$$

وبالتعويض عن س، ص في المعادلة الأصلية نكتب العلاقة التالية:

$$2\left(\frac{\text{سَ} + \sqrt{3}\,\text{صَ}}{2}\right) + \frac{-3\,\text{سَ} + \sqrt{3}\,\text{صَ}}{2\sqrt{3}} = 5$$

ويتبسيط المعادلة أعلاه نحصل المعادلة المطلوبة:

$$(2\sqrt{3} - 3)\,\text{سَ} + (6 + \sqrt{3})\,\text{صَ} = 10\sqrt{3}$$

خصائص تحويل الدوران

أ- يعتبر تحويل الدوران تحويل خطي.

ب- يحافظ تحويل الدوران على قياس الأصول وقياس الزوايا.

جـ- إن صورة نقطة الأصل (٠، ٠) هي (٠، ٠) أيضاً تحت تأثير د_α.

د- إذا كانت مجموعة جميع الدورانات في المستوى هي أ فإن المجموعة أ وعملية التركيب (بعد) المعرفة على أ تشكل زمرة إبدالية.

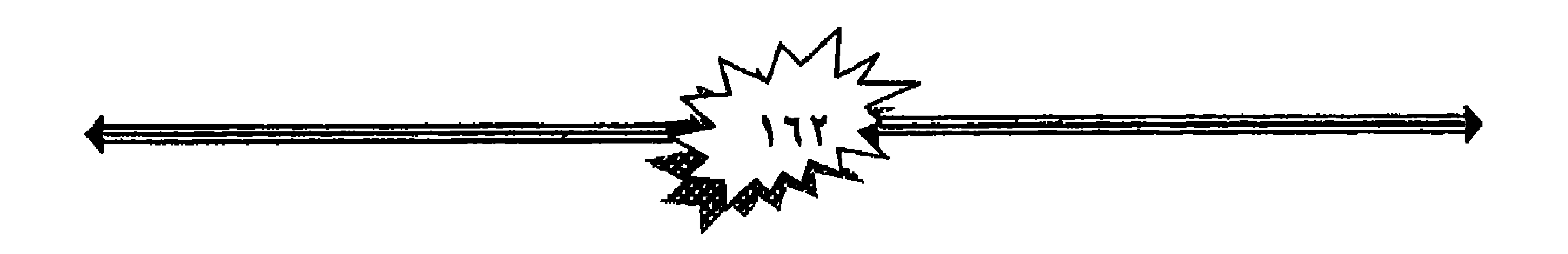
هـ- تركيب تحويلين دورانيين هو تحويل دوراني أيضاً.

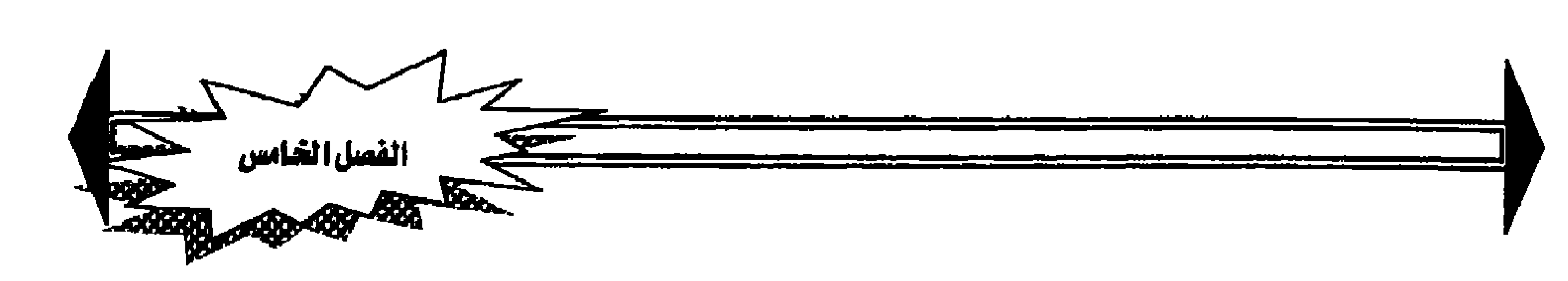
وليكن لدينا الدورانيين د_θ، د_α المعرفين من $\text{ح}^2 \longrightarrow \text{ح}^2$

فإن مصفوفة تركيب الدورانيين:

$$\text{د}_\alpha \circ \text{د}_\theta = \text{د}_{\theta+\alpha} = \begin{bmatrix} \text{جتا}(\theta+\alpha) & -\text{جا}(\theta+\alpha) \\ \text{جا}(\theta+\alpha) & \text{جتا}(\theta+\alpha) \end{bmatrix}$$

و- يعتبر تحويل الدوران $\text{د}\,\theta$ بالنسبة لعملية التركيب هو محايد التركيب.





ي- يعتبر تحويل دوران $د_{-\alpha}$ هو نظير التحويل الدوراني $د_{\alpha}$ بالنسبة لعملية التركيب.

مثال (٢١): ليكن لدينا التحويلين الدورانيين $د_{\frac{\pi}{3}}: ح^2 \longrightarrow ح^2$، $د_{\frac{\pi}{3}}: ح^2 \longrightarrow ح^2$

أوجد صورة النقطة أ= (-١، ٣) بالنسبة لتركيب الدورانيين $د_{\frac{\pi}{3}} o د_{\frac{\pi}{6}}$

الحل:

بالاستفادة من الخاصية الخامسة فإن $د_{\frac{\pi}{3}} o د_{\frac{\pi}{6}} = د_{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}} = د_{\frac{\pi}{2}}$

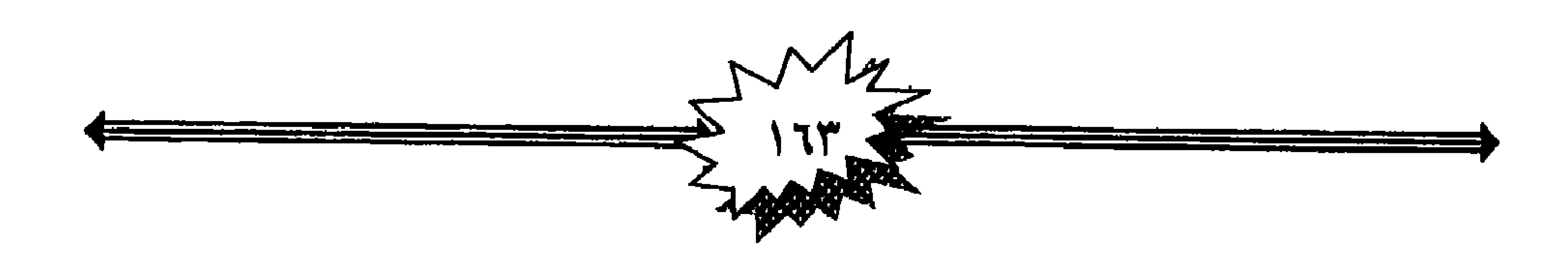
ولإيجاد صورة النقطة (-١، ٣) بالنسبة لتركيب الدورانين $د_{\frac{\pi}{3}} o د_{\frac{\pi}{6}}$ أي $د_{\frac{\pi}{2}}(-1،3)$

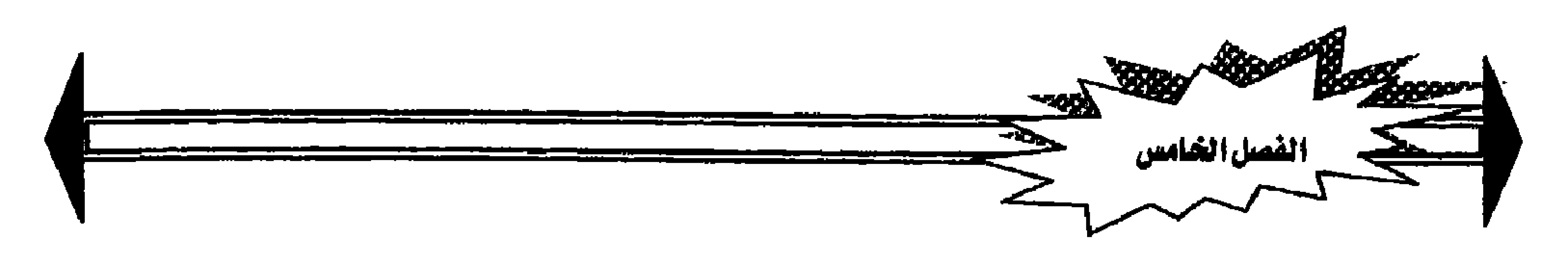
نفرض أن صور أ هي أ= (سَ، صَ) وعليه

فإن مصفوفة التحويل $د_{\frac{\pi}{2}}$ هي $\begin{bmatrix} جتا\frac{\pi}{2} & -جا\frac{\pi}{2} \\ جا\frac{\pi}{2} & جتا\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

وعليه فإن صورة النقطة المطلوبة هي:

$\begin{bmatrix} سَ \\ صَ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ أي أن صورة النقطة أ هي أ= (-٣،-١)



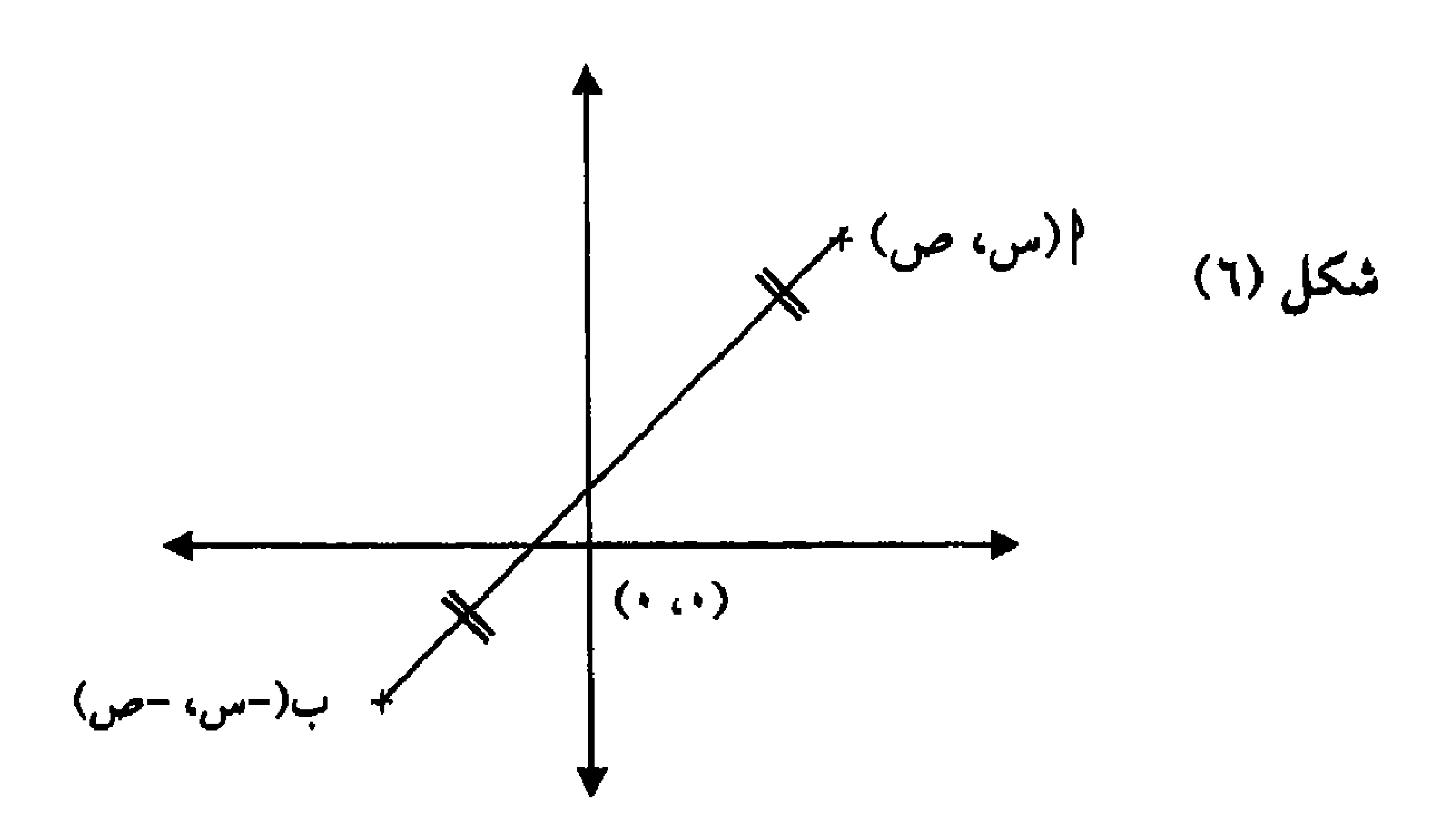


التماثل:

هو أحد التحويلات الهندسية وهناك عدة أنواع من هـذه التماثلات نـذكر منها ما يلي:

أ- التماثل حول نقطة الأصل (٠)

تعريف (٨): يقال للتحويل الدوراني حول نقطة الأصل الذي زاويته $\alpha = \pi$ بتحويل التماثل وسنرمز له بالرمز تـهـ وهذا واضح في شكل (٦)



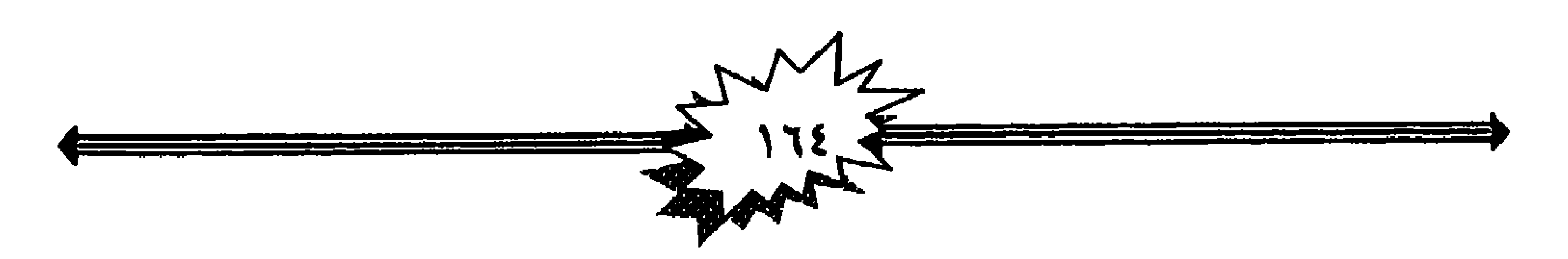
شكل (٦)

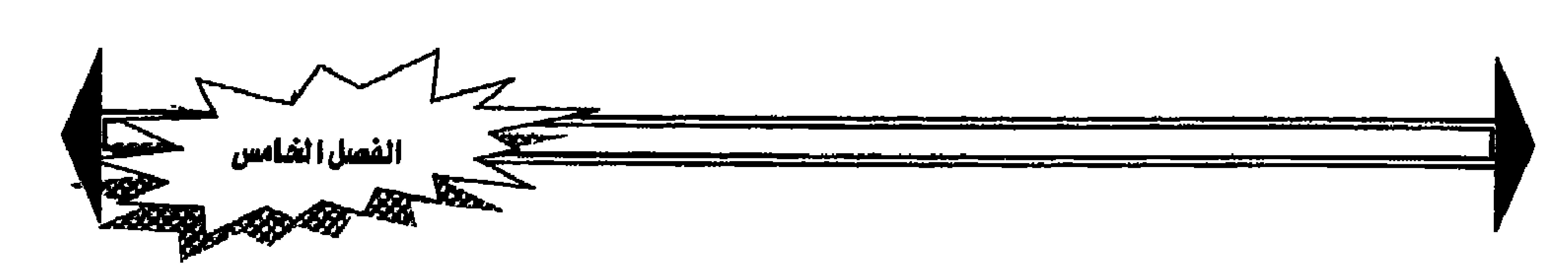
وعليه فتكون مصفوفة الدوران حول نقطة الأصل (٠) بزاوية قدرها $\alpha = \pi$

$$أ = \begin{bmatrix} \text{جتا}\pi & -\text{جا}\pi \\ \text{جا}\pi & \text{جـ جتا}\pi \end{bmatrix}$$

وتكـون مـصفوفة تحويـل التماثـل حـول نقطـة الأصل (٠) هي

$$أ. = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$





والآن لتكن صورة النقطة أ(س، ص) تحت تأثير تحويل التماثل حول نقطة الأصل أ̀= (سَ، صَ)

ولكون:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} سَ \\ صَ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} سَ \\ صَ \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} -س \\ -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \Leftarrow أ̀(سَ، صَ) = (-س، -ص)$$

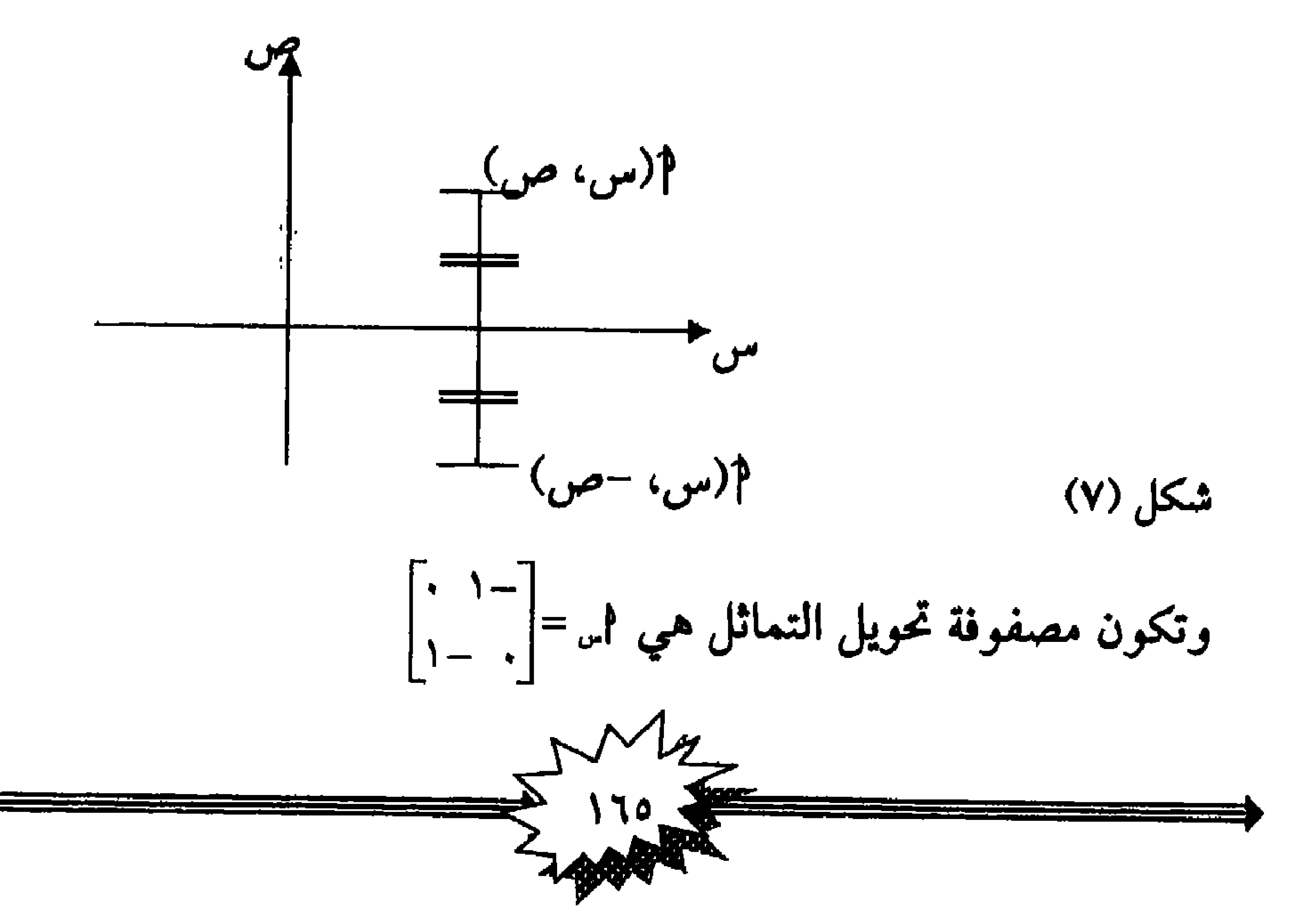
مثال (٢٢): أوجد صورة النقطة أ(-٣، ٤) تحت تأثير التحويل التماثل حول نقطة الأصل.

الحل:

بالاستفادة من العلاقة أعلاه نجد أن أ̀= (٣، -٤)

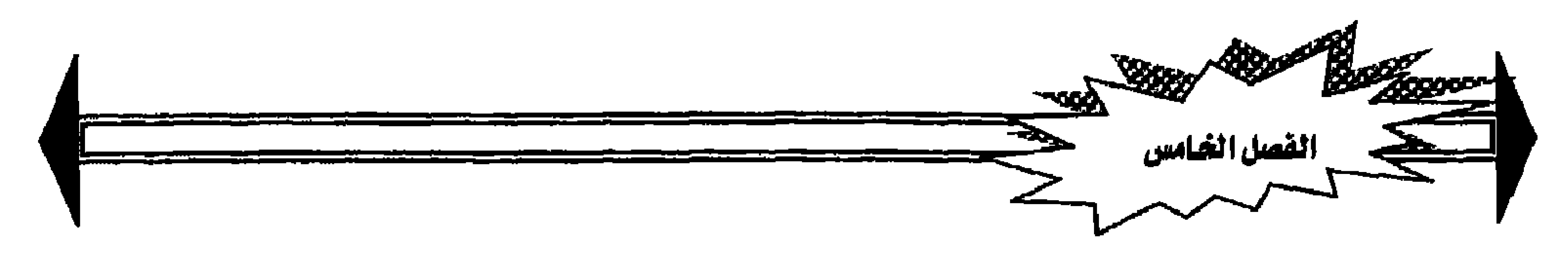
ب- التماثل حول محور س

إن صورة النقطة أ= (س، ص) تحت تأثير تحويل التماثل حول محور السينات هي أ̀= (س، -ص) وهذا واضح في شكل (٧).



شكل (٧)

وتكون مصفوفة تحويل التماثل هي $أ_س = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



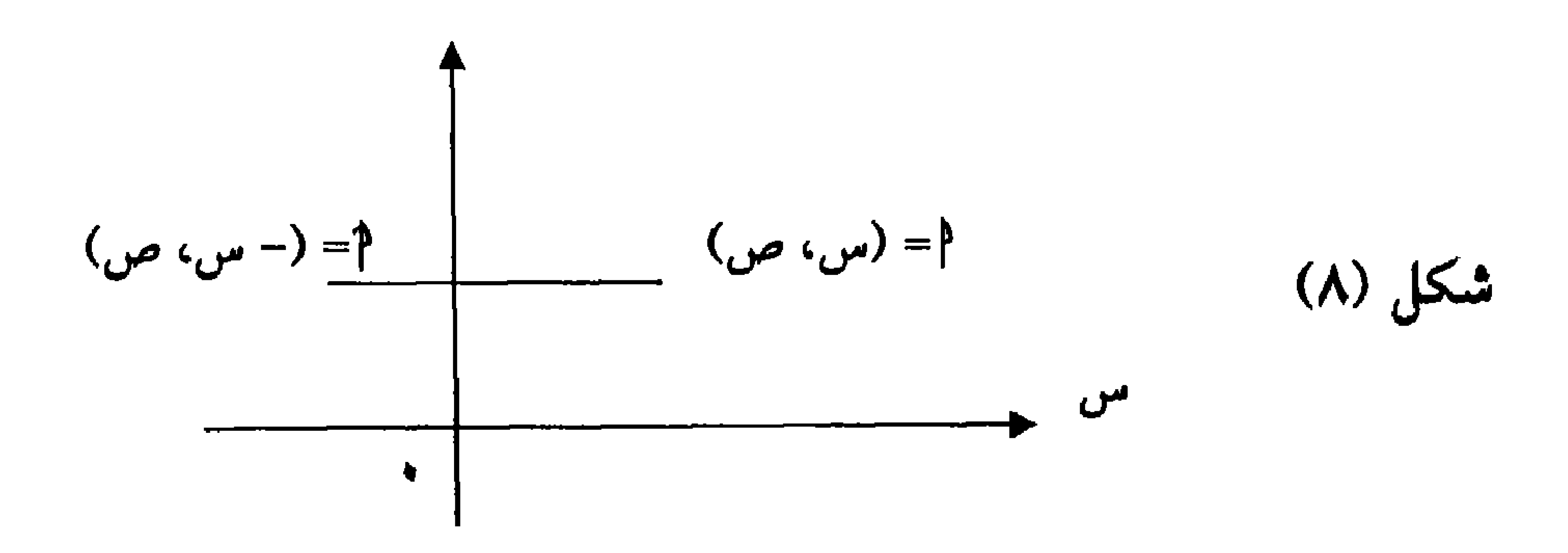
مثال (٢٣): أوجد صورة النقطة أ= (٧، ٢) تحت تأثير تحويل التماثل حول محور السينات.

الحل:

بالاستفادة من القاعدة أعلاه فإن صورة النقطة هي أ= (٧، -٢).

جـ- التماثل حول محور ص

إن صورة النقطة أ= (س، ص) تحت تأثير تحويل التماثل حول محور الصادات هي أ= (-س، ص) كما هو موضح في شكل (٨)



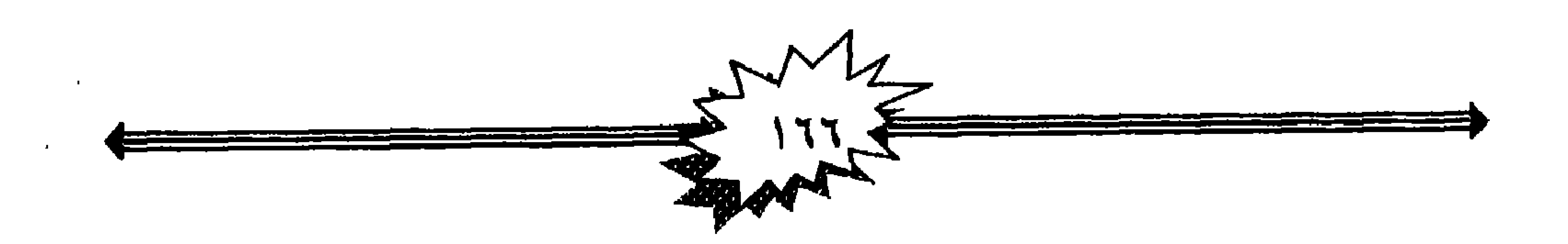
شكل (٨)

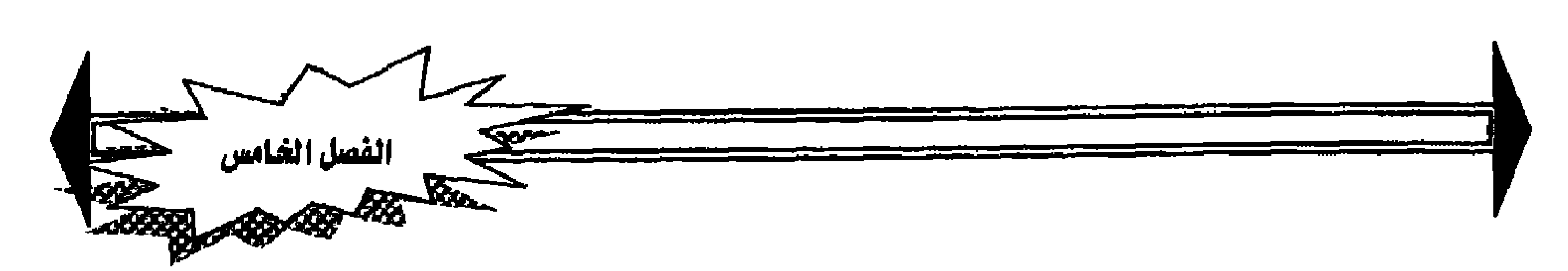
وتكون مصفوفة تحويل التماثل أ= $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

مثال (٢٤): أوجد صورة النقطة (-٣، ٠) تحت تأثير تحويل التماثل حول محور الصادات.

الحل:

بالاستفادة من العلاقة أعلاه فإن صورة النقطة أ= (٣، ٠)

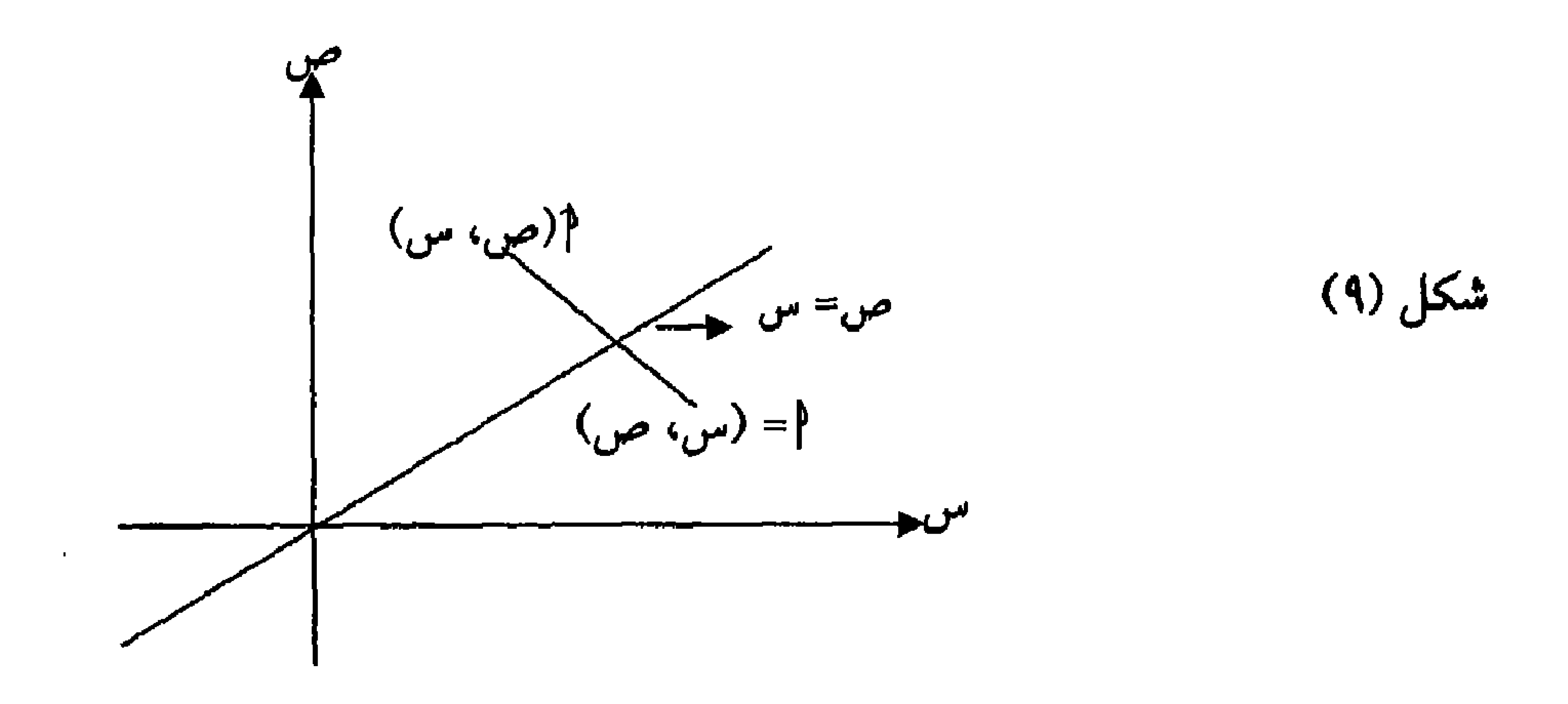




د- التماثل حول منصف الزاوية الأول (الأيمن)

إن صورة النقطة أ= (س، ص) حول محور التماثل ص= س هو أ= (ص، س) وتكون مصفوفة تحويل التماثل

$أ_{١} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ كما هو واضح في شكل (٩)

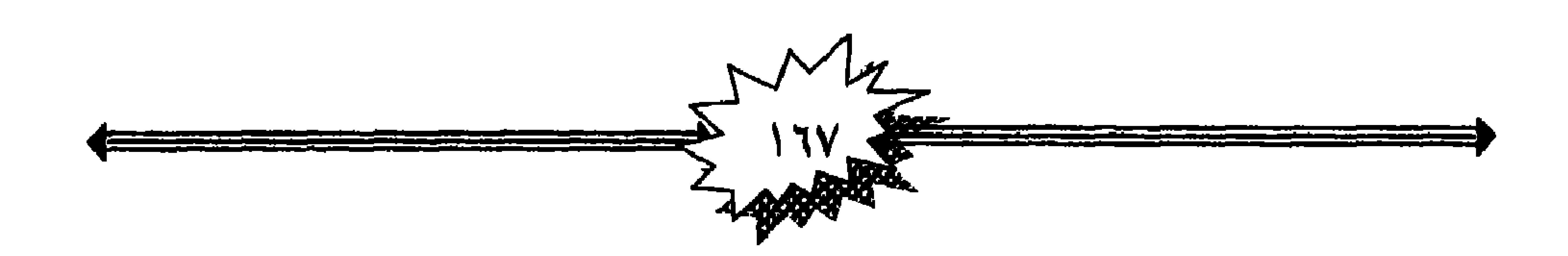


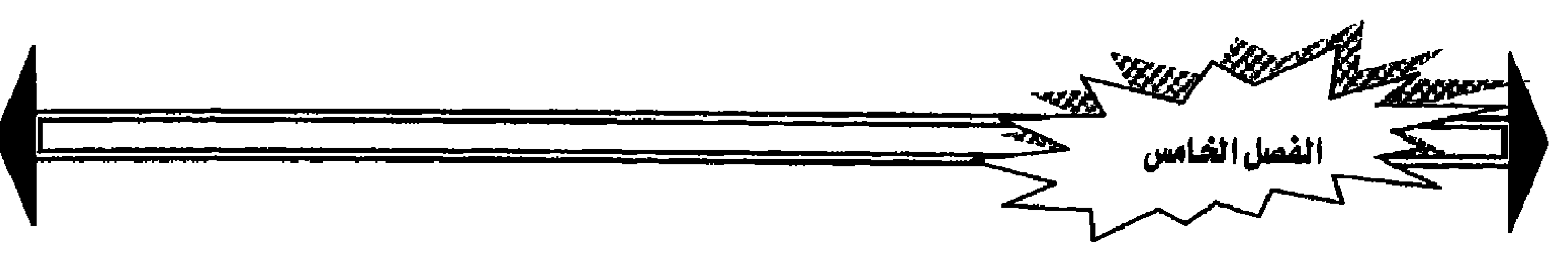
شكل (٩)

تحويل التشابه $هـ_{ك} \circ هـ_{ن} = هـ_{ك ن}$

تعريف (١٠): إن التحويل الناشئ عن تركيب تحويلين، تحويل الدوران حول نقطة الأصل بزاوية قدرها α والتحويل الهيموتيتي مركزه نقطة الأصل بمعامل تناسب ك يسمى بتحويل التشابه وسنرمز له بالرمز $ب_{(\alpha.ك)} = د_{\alpha} \circ$ هـ

$هـ_{ك} أ_{ب} = \begin{bmatrix} جتا\alpha & -جا\alpha \\ جا\alpha & جتا\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ك & ٠ \\ ٠ & ك \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ك\ جتا\alpha & -كجا\alpha \\ كجا\alpha & كجا\alpha \end{bmatrix}$ أما مصفوفة تحويل التشابه





مثال (٢٨): أوجد صورة النقطة (-٢، ٣) تحت تأثير تحويل التشابه $\text{ب}_{(\frac{\pi}{2}،٤)}$

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٤\,\text{جتا}\frac{\pi}{2} & -٤\text{جا}\frac{\pi}{2} \\ ٤\text{جا}\frac{\pi}{2} & ٤\,\text{جتا}\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٠ & -٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -١٢ \\ -٨ \end{bmatrix}=(-١٢،-٨)$$

مثال (٢٩): إذا كانت $\text{ب}_{(\pi،٤)}-(\text{س}،\text{ص})=(١٢،٨)$

أوجد قيم س، ص للنقطة (س، ص).

الحل:

$$\text{لكون}\ \begin{bmatrix} ٤\,\text{جتا}\pi & -\,\text{جا}\pi \\ ٤\text{جا}\pi & ٤\,\text{جتا}\pi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix}$$

فإننا نكتب المساواة التالية:

$$\begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ١٢ \\ ٨ \end{bmatrix}\Leftarrow\begin{bmatrix} -٤\text{س} \\ -٤\text{ص} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -١٢ \\ ٨ \end{bmatrix}$$

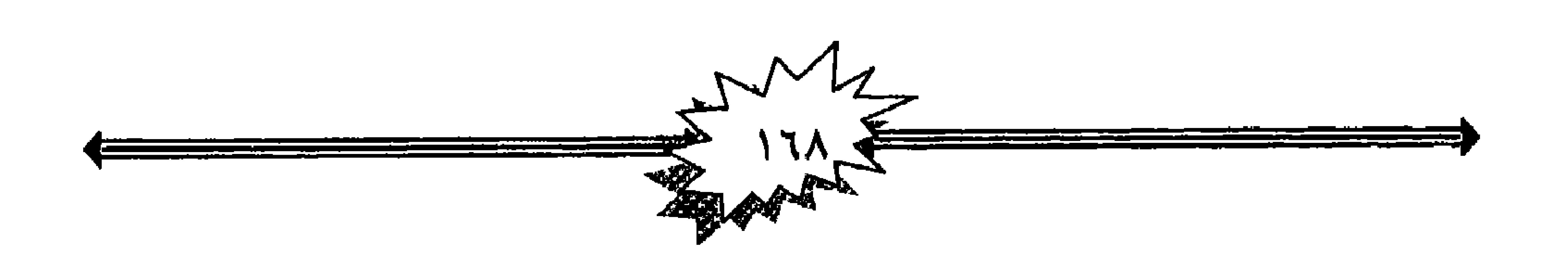
وعليه (-٤س، -٤ص)= (-١٢، ٨) أو (س، ص)= (٣، -٢)

مثال (٣٠): على اعتبار أن $\text{د}_{\frac{٣\pi}{2}} \circ \text{ت}_{\text{ص}}$ (س، ص)= (٤، -٣)

أوجد النقطة (س، ص)

الحل:

من كون أن صورة النقطة (س، ص) تحت تأثير تحويل التماثل حول محور الصادات هي (-س، ص) فإن مصفوفة تحويل التماثل هي $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$



ومصفوفة تحويل الدوران $د_{\frac{3\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \text{جتا}\frac{3\pi}{2} & -\text{جا}\frac{3\pi}{2} \\ \text{جا}\frac{3\pi}{2} & \text{جتا}\frac{3\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

وعليه فإن مصفوفة تحويل التركيب

$$د_{\frac{3\pi}{2}} \circ ت_{ص} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن صورة النقطة (س، ص) تحت تأثير تحويل التركيب

$$\left(د_{\frac{3\pi}{2}} \circ ت_{ص}\right)(س،ص) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص \\ س \end{bmatrix}$$

ولكون $\begin{bmatrix} ص \\ -س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \Longleftarrow$ س= ٣، ص= ٤، (س، ص)= (٣، ٤)

مثال (٣١): لدينا التحويلين الخطيين المعرفين ق:

$$ح^{2} \longrightarrow ح^{2}،\ ك: ح^{2} \longrightarrow ح^{2}$$

بالقاعدتين ق(س، ص)= (س-٢ص، ص)، ك(س، ص)= (س-ص، ٣س+ص) أوجد:

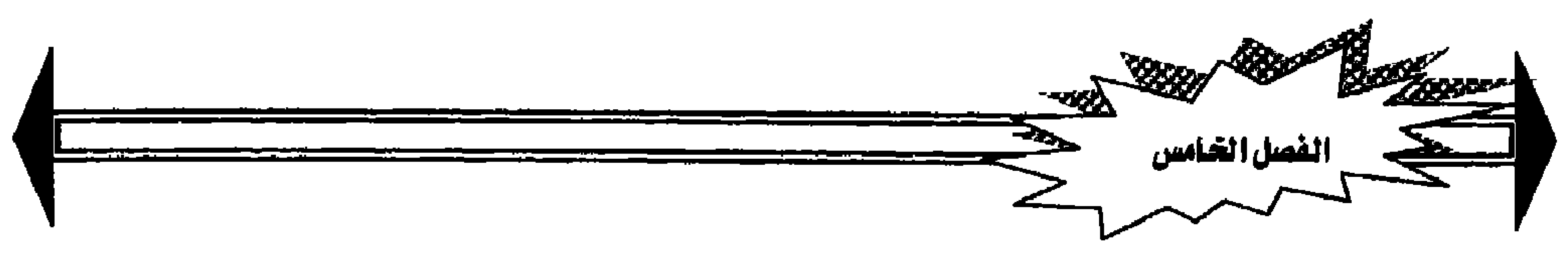
أ- مصفوفة التحويل لحاصل جمع ق + ك

ب- مصفوفة التحويل لتركيب التحويلين ك ○ ق

الحل:

وعليه فإن مصفوفة التحويل للتحويل ق + ك هي $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$





الطريقة الأولى:

نكون أولاً مصفوفة التحويل لكل التحويلين ق، ك فللتحويل ق

ق(س، ص)= (س-٢ص، ص)= (س-٢ص، (٠)س+ص)

وعليه فإن مصفوفة التحويل هي $\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

أما بالنسبة للتحويل الثاني ق(س، ص)= (س-ص، ٣س+ص)

فإن مصفوفة التحويل هي $\text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ وللإجابة على المطلوبين بالطريقة الأولى فإن

$$\text{أ- } \text{ق}+\text{ك} = \text{أ}+\text{ب} = \begin{bmatrix} 1+1 & -2-1 \\ 0+3 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب- } \text{ك} \circ \text{ق} = \text{ب}.\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

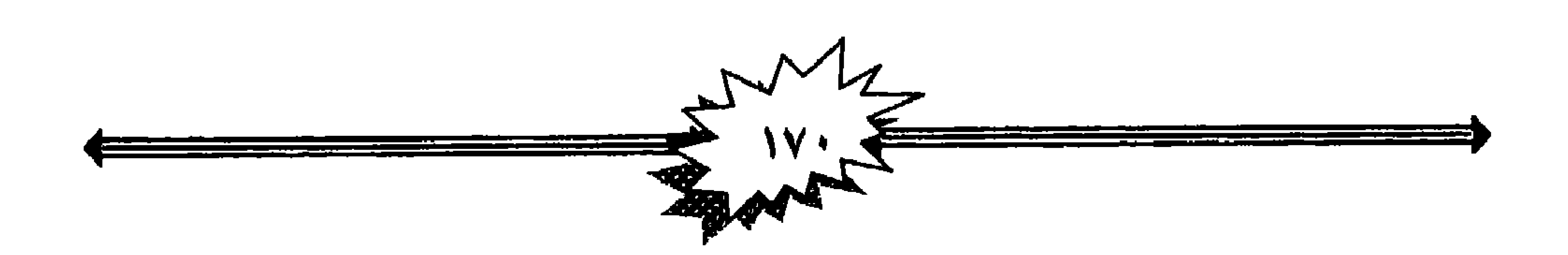
الطريقة الثانية:

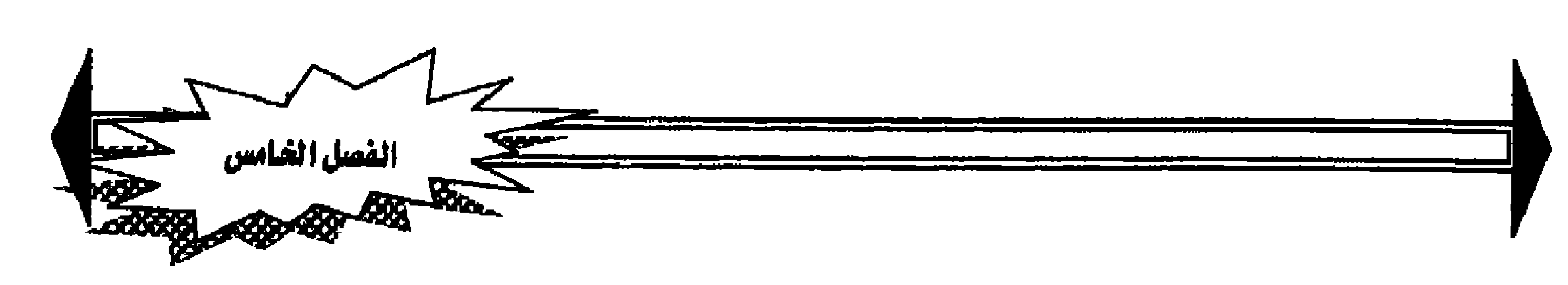
أ- (ق+ك) (س، ص)= (س-٢ص+س-ص، ص+٣س+ص)

= (٢س-٣ص، ٣س+٢ص)

وعليه فإن مصفوفة التحويل للتحويل ق+ك هي $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

ب- (ك ○ ق) (س، ص)= ك[ق(س، ص)]





= ك[س-٢ص، ص] = (س-٢ص - ص، ٣(س-٢ص) + ص)

= (س-٣ص، ٣س-٥ص)

وعليه فإن مصفوفة التحويل للتحويل ك ○ ق

هي $\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٣ & -٥ \end{bmatrix}$

مثال (٣٢): أوجد معادلة صورة المنحنى

ص= س^{٢}+٢ تحت تأثير تحويل دوران زاويته ٢٧٠° حول نقطة الأصل هي

الحل: أن مصفوفة تحويل الدوران بزاوية ٢٧٠° حول نقطة الأصل هي:

$$\begin{bmatrix} \text{جتا}٢٧٠^\circ & -\text{جا}٢٧٠^\circ \\ \text{جا}٢٧٠^\circ & \text{جتا}٢٧٠^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

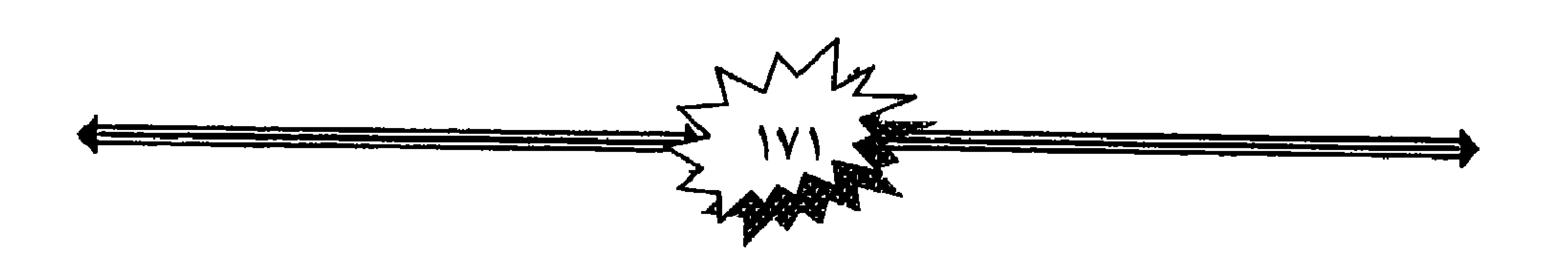
ولتكن النقطة ن(س، ص) على منحنى الاقتران ص= س^{٢}+٢

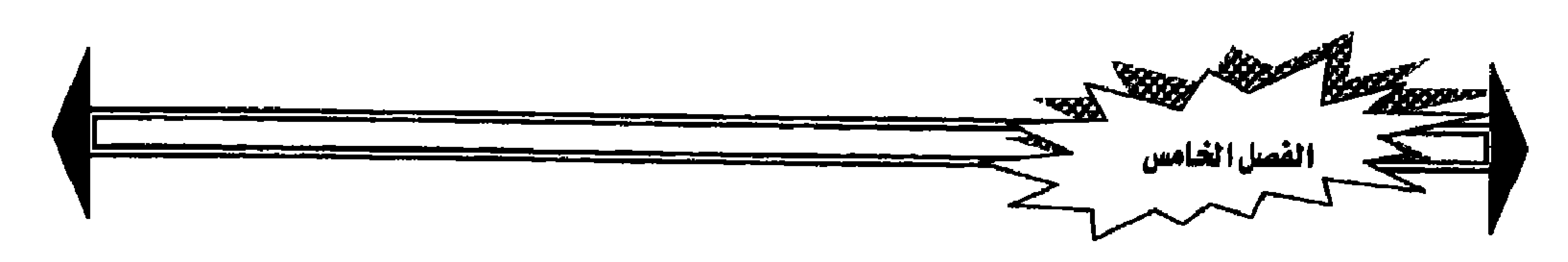
وصورتها تحت تأثير تحويل الدوران نَ (سَ، صَ)

وعليه فإن $\begin{bmatrix} سَ \\ صَ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص \\ -س \end{bmatrix} \Longleftarrow$ سَ= ص، صَ= -س.

وبالتعويض عن قيم س، ص نحصل على صورة المعادلة:

سَ= (-صَ)^{٢}+٢ $\Longleftarrow$ سَ= صَ^{٢} + ٢





تمارين عامة

س١- لدينا التحويل الخطي المعرف ق: ح^{٢} ⟵ ح^{٢}

بالقاعدة ق(س$_{١}$، س$_{٢}$)= (س$_{١}$-س$_{٢}$، ٢س$_{٢}$ + س$_{١}$) أوجد مصفوفة التحويل الخطي لهذا التحويل.

س٢- أي من التحويلات التالية هو تحويل خطي مع التوضيح:

أ- ت: ح^{٢} ⟵ ح^{٢}، ت(س، ص) = (س^{٢}، ص^{٢})

ب- ت: ح^{٣} ⟵ ح^{٢}، ت(س، ص، ع)= (س + ص + ع، ١)

جـ- ت: ح^{٢} ⟵ ح^{٣}، ت(س، ص)= (س ص، ص، س)

د- ت: ح ⟵ ح^{٢} ، ت(س)= (١، -١)

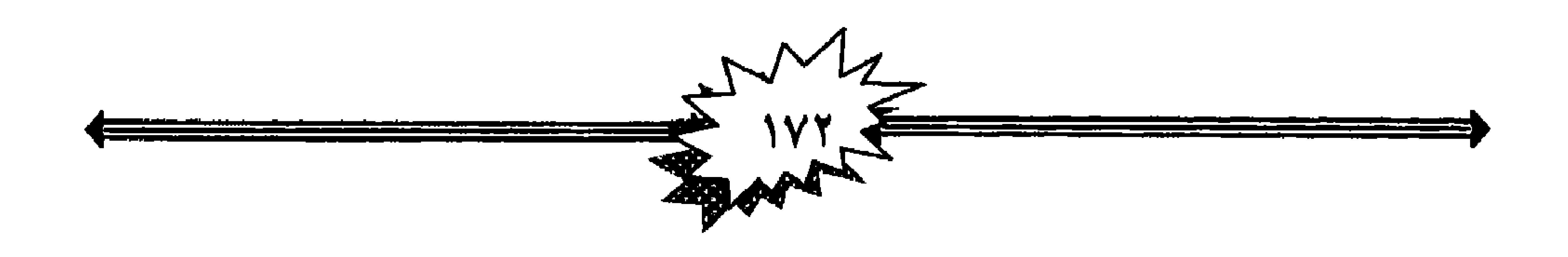
هـ- ت: ح ⟵ ح^{٢} ، ت(س)= (٢س$_{٢}$-س)

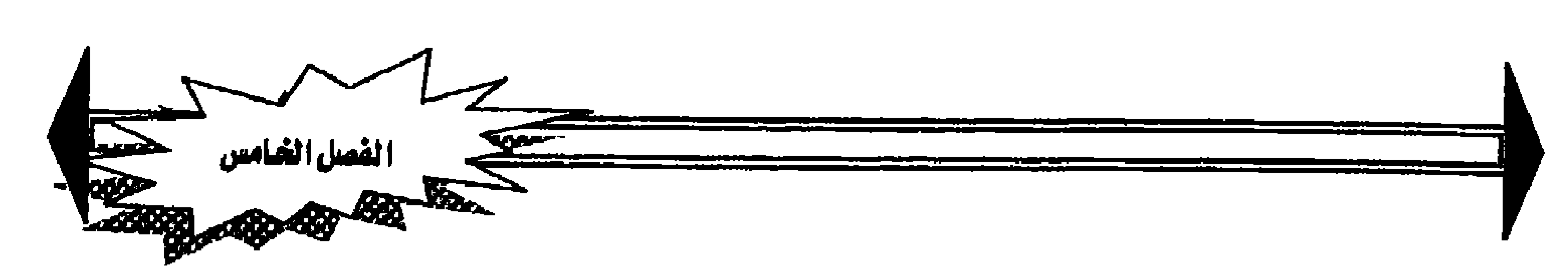
س٣- إذا كانت مصفوفة التحول الناشئة عن التحويل الخطي ق: ح^{٢} ⟵ ح^{٢}

هي أ= $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ أوجد صورة المتجه $\overleftarrow{أ}$ = (٤، ٩) تحت تأثير هذا التحويل.

س٤- لدينا التحويل الخطي المعرف من ق: ح^{٢} ⟵ ح^{٢} بالقاعدة

ق(س، ص)= (س+٢ص، س، ٢س-ص) أوجد مصفوفة التحويل لهذا التحويل الخطي.





س٥- في التحويل الخطي ت: $ح^٢ \longrightarrow ح^٢$ إذا كان ت($هـ_٢$)= (٤، ٣)، ت($هـ_١$)= (٣، ٢) أوجد ت(س، ص)

س٦- لدينا التحويل الخطي المعرف على ق: $ح^٣ \longrightarrow ح^٣$، ق(س، ص، ع)= (س+ص، ٢س+ع، س-ص)

فإذا كانت ﺃ هي مصفوفة التحويل الخطي فأوجد هذه المصفوفة وأوجد محددها.

س٧- في التحويل الخطي ق: $ح^٣ \longrightarrow ح^٣$ وعلى اعتبار أنها

ق(١، ٠، ٠)= (١، ٢، ٣)، ق(٠، ١، ٠)= (٠، ١، ١)، ق(٠، ٠، ١)= (١، ١، ٠)

أوجد $ق^{-١}$(٢، ٣، ٤)

س٨- في التحويلين الخطيين إذا كان ق: $ح^٢ \longrightarrow ح^٢$ ، ك: $ح^٢ \longrightarrow ح^٢$ معرفين بالقاعدتين

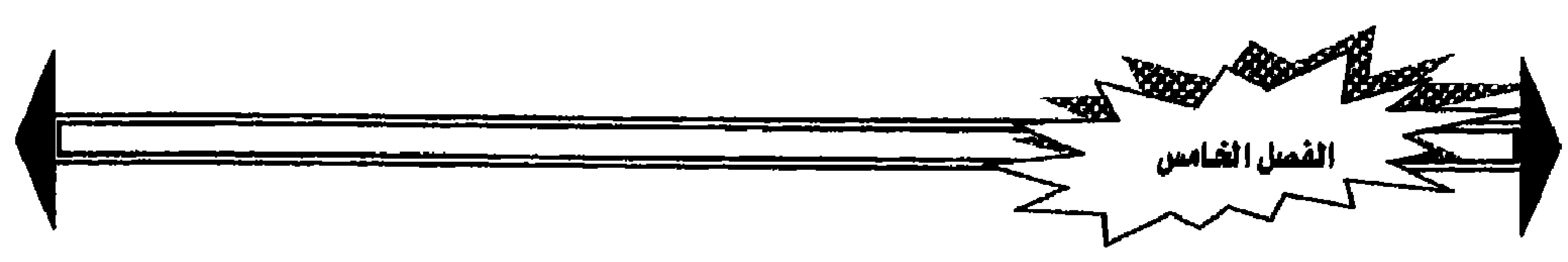
ق(س، ص)= ($س_٢$-ص)، ك(س، ص)= (ص، س)

أوجد (ك ○ ق) (س، ص).

س٩- لدينا مصفوفة التحويل الخطي المعرف من ق: $ح^٣ \longrightarrow ح^٢$ وهي ﺃ= $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$ أوجد ق(١، ٢، ٣)

س١٠- لدينا التحويل الخطي ق: $ح^٢ \longrightarrow ح^٢$ وعلى اعتبار أن ق(٣، ١)= (٢، -٤)، ق(-٢، ٠)= (-٢، ٦) أوجد ق$\left(\overleftarrow{هـ}_١+\overleftarrow{هـ}_٢\right)$





س١١- لدينا التحويلين الخطيين معرفين من $ح^٣$ ⟵ $ح^٣$ على النحو ق(س، ص، ع)= (س+٢ح، ص−س، ع+ص)

ك(س، ص، ع)= (٠، س، ص) أوجد مصفوفة التحويل لتركيب التحويلين ك ○ ق

س١٢- لدينا التحويلين المعرفين من $ح^٣$ ⟵ $ح^٢$ على النحو التالي:

ق(س، ص، ع)= (٢س، ص+ع)، ك(س، ص، ع)= (ع−س، ص)

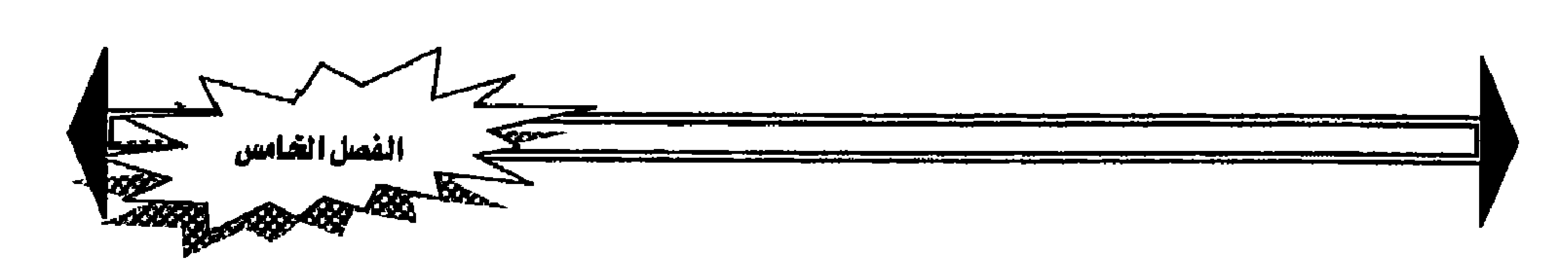
أوجد مصفوفة التحويل ٢ق − ٥ك.

س١٣- لدينا التحويلات الخطية المعرفة على النحو ق: $ح^٣$⟵$ح^٢$، ك: $ح^٣$⟵$ح^٣$، هـ: $ح^٢$⟵$ح^٢$

بالقواعد التالية ق(س، ص، ع)= (س + ص، ع)، ك(س، ص، ع)= (س، ص−ع)

هـ(س، ص)= (٢س، ص) أوجد مصفوفة التحويل هـ ○ (ق+ك)





أسئلة موضوعية

س١- إذا كان ق، ك تحويلان خطيان من ح^{٣} ⟵ ح^{٢} معرفان على النحو

ق(س، ص، ع)= (٢س، ص+ع)، ك(س، ص، ع)= (س-ع، ص) فإن مصفوفة التحويل لـ ٢ق-٥ك هي

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ & -١ \\ ٢ & ٠ & -٣ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

س٢- لدينا التحويلين الخطيين ق، ك من ح^{٣} ⟵ ح^{٣} معرفين بالقاعدتين ق(س، ص، ع)= (س+٢ع، ص-س، ع+ص)، ك(س، ص، ع)= (٠، س، ص) فإن مصفوفة التحويل الخطي لـ ك ○ ق هي

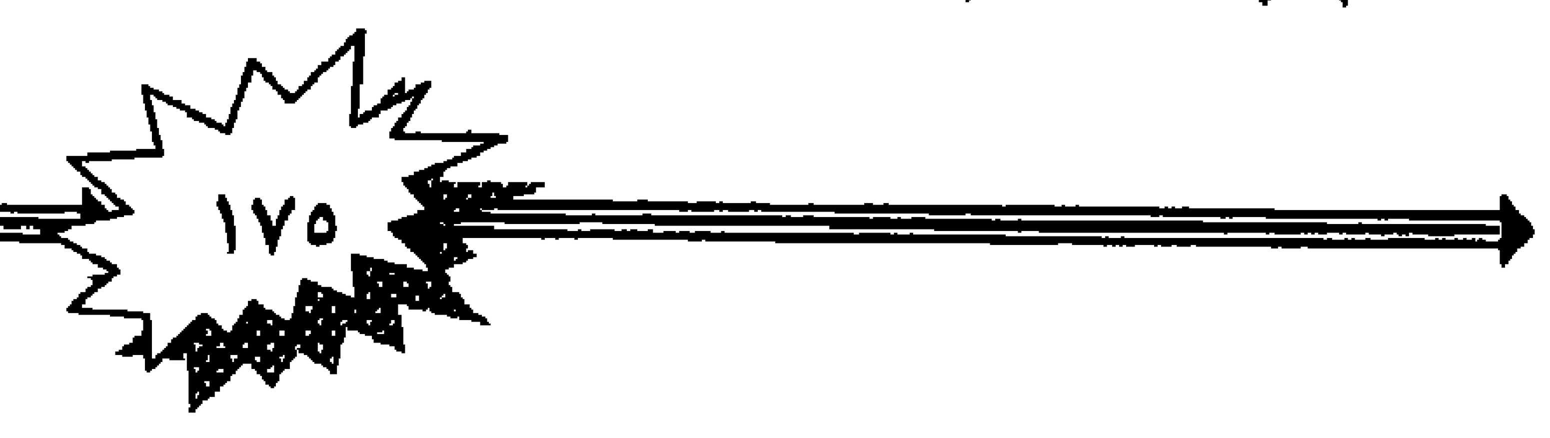
أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

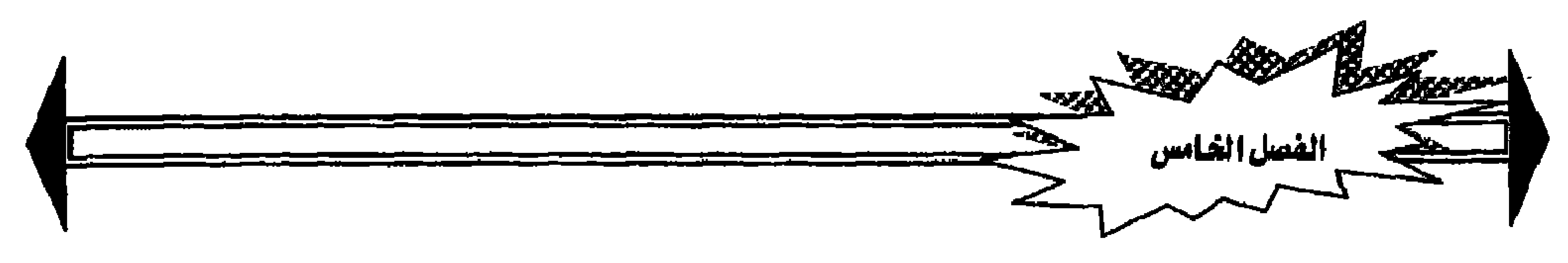
د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

س٣- على اعتبار أن ب$_{(\pi، ٤)-(س، ص)=(-١٢، ٨)}$ فإن النقطة (س، ص) هي:

أ) (٣، -٢) ب) (-٣، ٢) جـ) (-٢، ٣) د) (-٤، ١)

هـ) (-٢، -٣)





س٤- في التحويل الخطي ق: $ح^٣ \longrightarrow ح^٣$ وعلى اعتبار أن ق$\left(\overleftarrow{هـ}\right)$= (-٤، ٣، ٤)

ق$\left(\overleftarrow{هـ_١}\right)$= (-١، ٢، ٤) ، ق$\left(\overleftarrow{هـ_٢}\right)$= (٣، -١، ٠) فإن رتبة مصفوفة التحويل هي

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤ هـ) ٥

س٥- التحويلات ق، ك المعرفة على النحو $ح^٣ \longrightarrow ح^٣$: ق (س، ص، ع)= (س+ص+ع،٠،٠)

ك(س، ص، ع)= (ص، ع، س) فإن (ق-ك) (١، ٠، ١) هي:

أ) (-٢، ١، ١) ب) (١، ٢، ١) جـ) (-١، ٢، ١)

د) (٢، -١، -١) هـ) (١، ١، -٢)

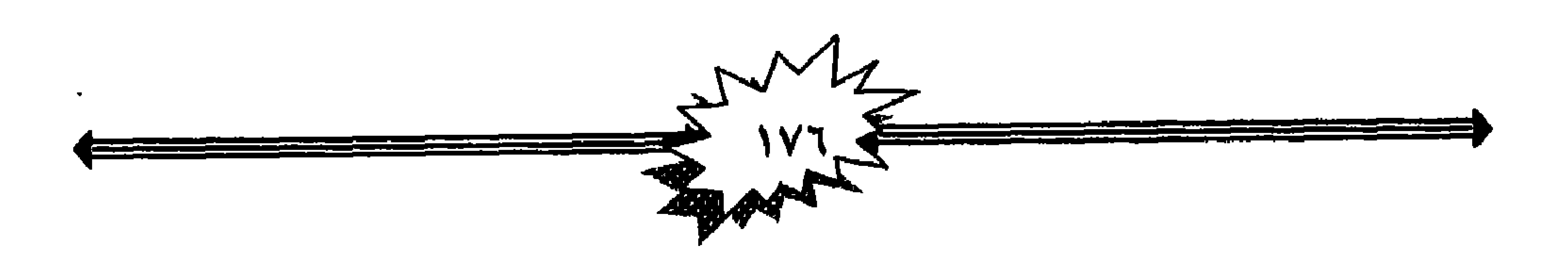
س٦- لدينا التحويلات الخطية التالية ق: $ح^٣ \longrightarrow ح^٣$، ك: $ح^٣ \longrightarrow ح^٢$، هـ: $ح^٢ \longrightarrow ح^٢$

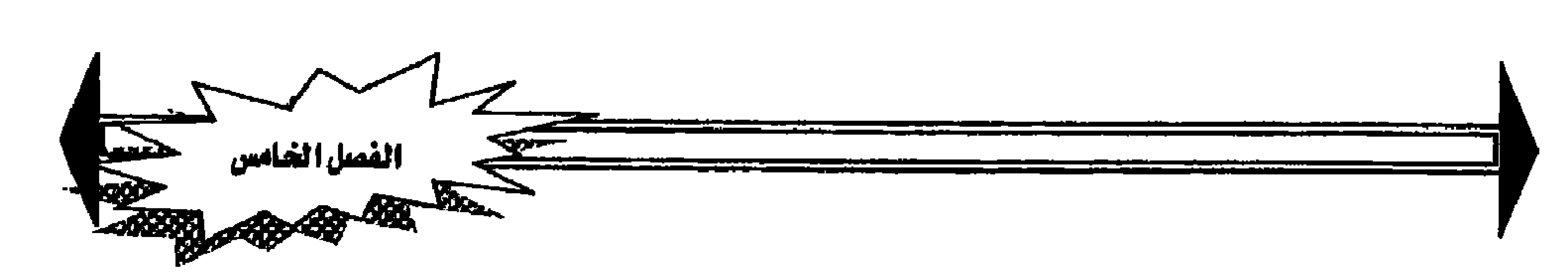
معرفة على النحو التالية ق(س، ص، ع)= (ص، س+ع)، ك(س، ص، ع)= (٢ع، س-ص)

هـ(س، ص)= (ص، ٢س) فإن قيمة هـ ○ (ق+ك) (-١، ٢، ٣) هي:

أ) (-١، ١، ٦) ب) (٠، ١، ٢) جـ) (-١، ١، ٠)

د) (٠، ١، ٤) هـ) هـ (١، ٢، -٢)





س٧- لدينا التحويلين الخطيين والمعرفين على النحو

ق: ح^{٣} ⟵ ح^{٢} ، ق(س، ص، ع)= (٢س-ص، س + ٣ع)

ك: ح^{٣} ⟵ ح^{٢} ، ك(س، ص، ع)= (س، ص+ع)

فإن رتبة مصفوفة التحويل ق + ٢ك هي

أ) ٠   ب) ١   جـ) ٢   د) ٣   هـ) ٤

س٨- لدينا التحويلين الخطيين المعرفين على النحو التالي:

ق: ح^{٢} ⟵ ح^{٢} ، ق(س، ص)= (٢س-ص، ٢ص)

ك: ح^{٢} ⟵ ح^{٢} ، ك(س، ص)= (س+٢ص، -٢س)

فإن مصفوفة التحويل للاقتران (ق ○ ك)$^{-١}$ هي

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٠ & ٣- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

د) $\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$

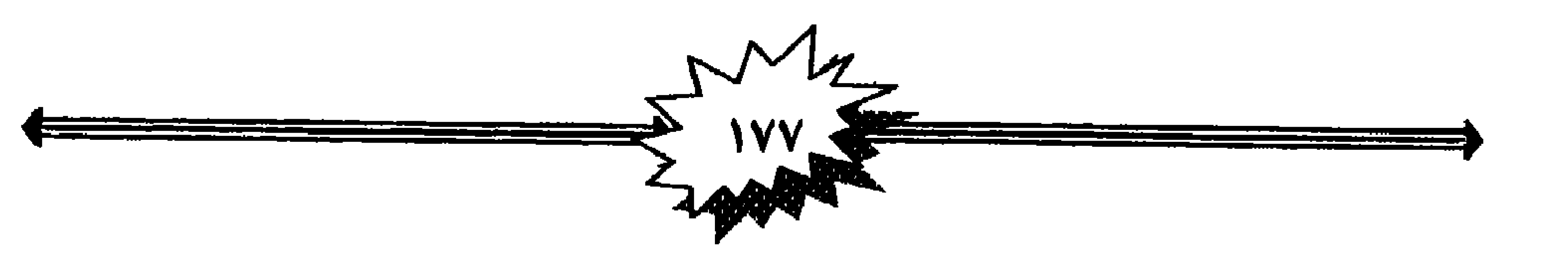
س٩- لدينا التحويلين ق، ك وهما تحويلا انسحاب معرفين كما يلي:

ح^{٢} ⟵ ح^{٢}، ق(س، ص)= (س+٢، ص-١) ، ك(س، ص)= (س-٣، ص+٤)

فإن صورة النقطة (-٣، ٢) تحت تأثير التحويل ك ○ ق هي

أ) (١، ٥)   ب) (٢، ٤)   جـ) (-٣، ٤)

د) (١، ٢)   هـ) (-٢، -١)



س١٠- لدينا التحويل الخطي المعرف على النحو التالي ق: $ح^{٢} \longrightarrow ح^{٢}$

ق(س، ص)= (أس + ب ص، جـ س + دص) وعلى اعتبار أن

ق(١، ٢) = (١، ١) ، ق(٣، -٢)= (٣، -٥) فإن مصفوفة التحويل للاقتران ق هي:

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$

س١١- لدينا التحويل المعرف على النحو ق: $ح^{٣} \longrightarrow ح^{٣}$، ق(س، ص، ع)= (س+٢ص-ع، ص+ع، س+ص-٢ع)

فإن بعد الفضاء المتجهة الصفري لهذا التحويل ق هو:

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤ هـ) ٥

س١٢- إذا كان المستوى $ح^{٢}$ والمعرف عليه تركيب التحويلين هي (٦، -٩) فإن صورة النقطة (٣، ٢) تحت تأثير التحويل هي:

أ) (-٦، ٩) ب) (-٦، -٩) جـ) (-٩، ٦) د) (-٩، -٦)

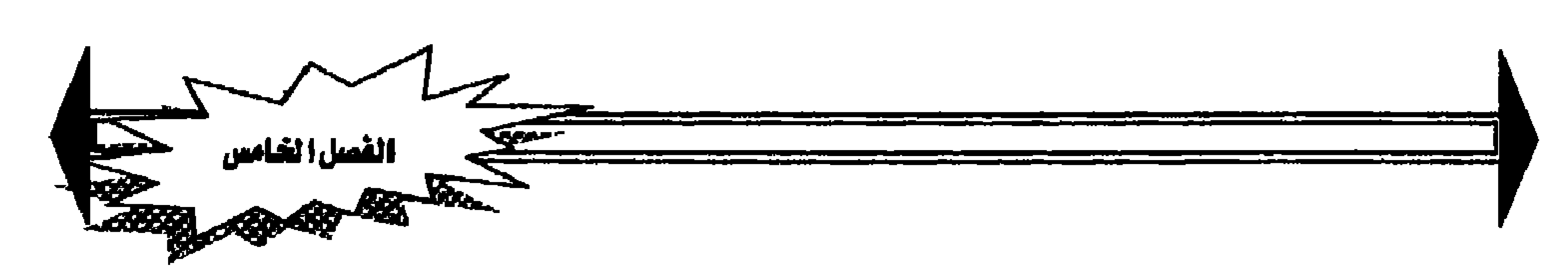
هـ) (٩، ٦)

س١٣- لدينا فضاء المتجه أ= {(س، ص) ∈ $ح^{٢}$: ٢س= ٣ص} ⊂ $ح^{٢}$

فإن قاعدة هذا الفضاء المتجه الجزئي هي

أ) (-٢، -٣) ب) (-٢، ٣) جـ) (٢، ٣) د) (٣، ٢)

هـ) (-٣، -٢)



س١٤- لدينا تحويلي الانسحاب قأ: ح^٢ ⟵ ح^٢ ، أ= (-٤، ١)

قب: ح^٢ ⟵ ح^٢ ، ب= (-٤، ١) فإن صورة التركيب قأ ○ قب (٧، ٢) هي

أ) (٩، ٧)　　ب) (-٢، ٦)　　جـ) (٤، ١)

د) (٥، ٨)　　هـ) (٨، ٠)

س١٥- لدينا التحويل الخطي ح^٢ ⟵ ح^٢ وأن مصفوفة التحويل هي

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

فإن صورة معادلة الخط المستقيم ٣س-٢ص-٥= ٠ تحت تأثير هذا التحويل هي:

أ) ٢س-٣ص-٥= ٠　ب) ٢س+٣ص+٥= ٠　جـ) ٣س+ص+٥=٠

د) ٣س+٢ص-٥= ٠　هـ) ٢س-٣ص+٥= ٠

س١٦- إذا كان لدينا تحويلي التماثل ت. (٠، ٠)

حول نقطة الأصل تس حول محور السينات، فإن صورة النقطة (-٣، ٤) تحت تأثير تركيب التماثل ت$_{س}^{٢}$ ○ ت.^{٢} (-٣،٤) هي:

أ) (٠، ٣)　ب) (٣، -٤)　جـ) (-٣، ٤)　د) (٤، -٣)

هـ) (-٤، ٣)

س١٧- إن صورة المجموعة ك= {(س، ص): س^٢-ص+٢= ٠ ، س ∈ ح}

تحت تأثير الدوران د$_{\frac{٣\pi}{٢}}$ حول نقطة الأصل ٠ (٠، ٠) هي

أ) ص-س+٢　ب) ص^٢ - س^٢ + ٢= ٠　جـ) ص^٢ - ٢س + ٢= ٠

د) ص^٢ - س + ٢= ٠　هـ) ص^٢ + س - ٤= ٠



الحقـــول

الفصل السادس

الحقول

سيلاحظ القارئ أن كثيراً من خواص الحقول ما هي إلا تجريد أو تعميم لخواص حقول الأعداد النسبية والأعداد الحقيقية والأعداد العقدية، كما لاحظنا سابقاً أن خواص المساحات والساحات المرتبة ما هي إلا تجريد أو تعميم لخواص ساحة الأعداد الصحيحة.

الساحات والحقول

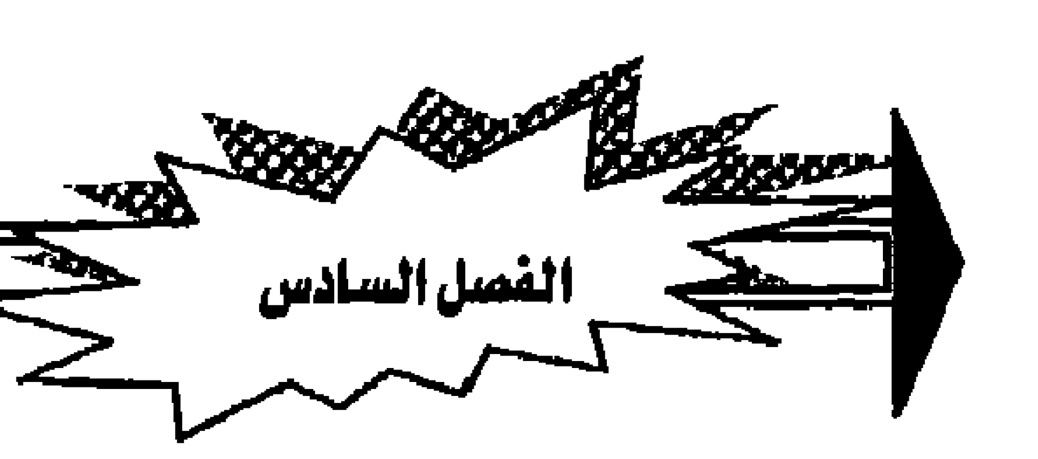
تعريف (١): لتكن ق حلقة إبدالية غير تافهة محتوية على عنصر محايد. يقال أن ق حقل إذا تحقق الشرط الآتي: كل عنصر في ق عدا الصفر له نظير ضربي.

من معلوماتنا السابقة نعلم أن النظير – إن وجد – يكون وحيداً فإذا كان أ عنصراً في ق و أ $\neq$ ٠ نرمز للنظير الوحيد للعنصر أ بالرمز $أ^{-1}$. وإذا كان ١ هو المحايد الضربي للحقل ق فإننا نكتب أ. $أ^{-1}$ = ١.

(ولكون عملية الضرب على ق إبدالية فلا داعي لكتابة أ. $أ^{-1}$ = $أ^{-1}$. أ = ١

مبرهنة: كل حقل يكون ساحة.

البرهان: علينا فقط أن نبرهن عدم وجود قواسم للصفر في الحقل. ليكن كل من أ و ب عنصراً في الحقل ق بحيث أب= ٠ وأن أ $\neq$ ٠ بما أن أ $\neq$ ٠، إذاً يوجد نظير ضربي للعنصر أ هو $أ^{-1}$. إذاً $أ^{-1}$(أب)= ($أ^{-1}$أ) ب= ١. ب = ب.



ولكن

$أ^{-1}(أب)= أ^{-1} . (٠)= ٠$

إذاً ب= ٠ وهذا ينهي البرهان □.

وقد برهنا سابقاً أن كل ساحة منتهية تكون حقلاً.

مبرهنة: إذا كان كل من أ و ب عنصراً في حقل ق وكان أ ≠ ٠ فإن في ق عنصراً وحيداً ص بحيث أن أص= ب ويكون ص= $أ^{-1}$. ب.

البرهان:

من الواضح أن $أ^{-1}$ب حل للمعادلة أص= ب وذلك لأن

$أ(أ^{-1}.ب)= (أ. أ^{-1})ب= ١. ب= ب$ ولبيان وحدانية الحل نفرض أن

أص= ب وأن $أص_٢$= ب إذاً $أص_١= أص_٢$ وبما أن أ ≠ ٠

فإن $ص_١= ص_٢$ (باستعمال قانون الحذف). □

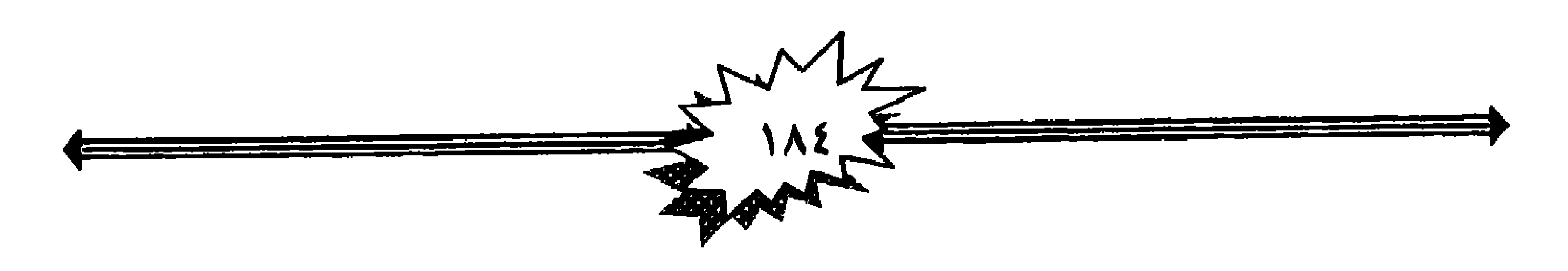
مثال (١): الأعداد الحقيقية التي تكون على هيئة $س+ص\sqrt{٢}$

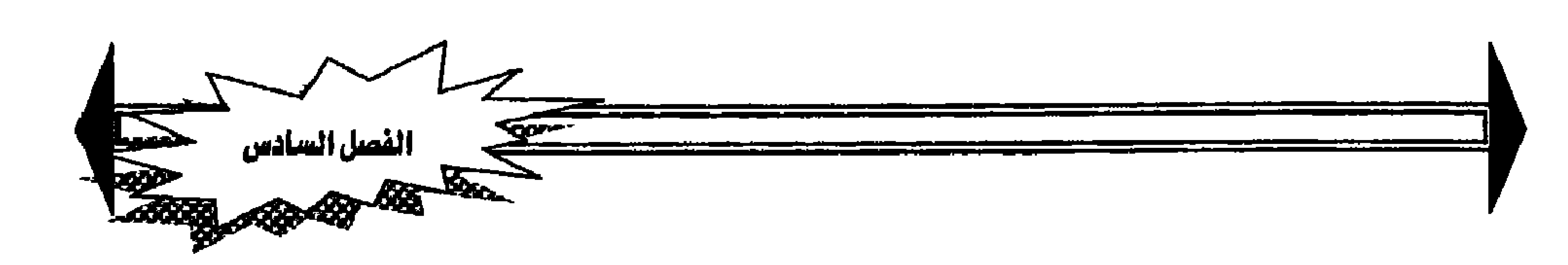
حيث أن كلاً من س و ص عدد نسبي، مع عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية تشكل حقلاً سنترك للطالب أن يتحقق من ذلك كتمرين بسيط.

مثال (٢): الأعداد الحقيقية من النمط $ل+ع\sqrt{٣}$

حيث أن كلاً من ل، ع عنصر في الحقل المعرف في المثال (١) أعلاه، مع عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية تشكل حقلاً.

سنترك للطالب أن يتحقق من ذلك كتمرين بسيط.





نواتج القسمة في حقل

نرمز عادة للحل الوحيد $أ^{-1}$ب في أي حقل للمعادلة أس= ب، حيث أن أ ≠ ٠ بالرمز $\frac{ب}{أ}$ فمثلاً في $ط_٥$، $\frac{٢}{٣}$ يعني ٢: $٣^{-١}$ = ٢: ٢= ٤

يمكننا أن نبرهن القوانين الآتية لعملية القسمة.

أ) $\frac{أ}{ب}$ يساوي $\frac{جـ}{د}$ إذاً وفقط إذا أد= ب جـ

ب) $\frac{أ}{ب}+\frac{جـ}{د}=\frac{أد+ب جـ}{ب د}$

جـ) $\left(\frac{أ}{ب}\right)\left(\frac{جـ}{د}\right)=\frac{أ جـ}{ب د}$

سنترك للطالب أن يبرهن هذه القوانين كتمارين بسيطة.

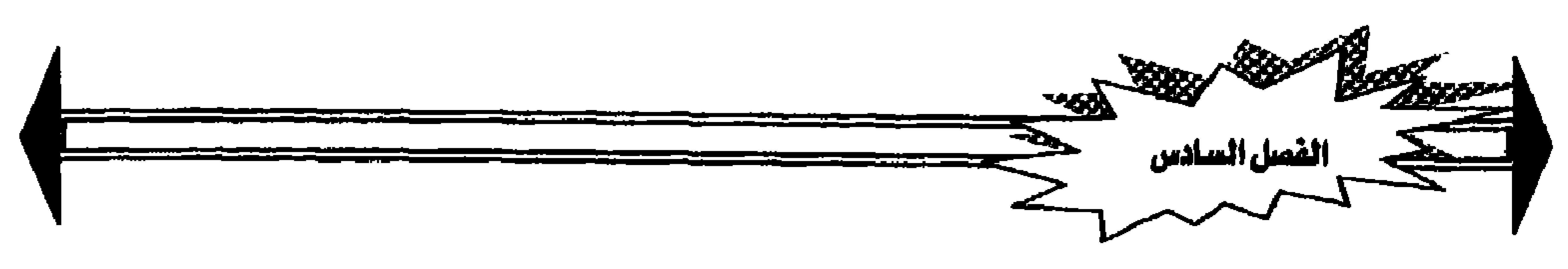
نؤكد هنا أن القسمة على صفر غير معرفة في أي حلقة ح. لأن (٠)س ≠ ١ لأي عنصر س في ح وهذا يعني أن العنصر (٠) لا يمكن أن يكون له نظير ضربي.

حقل نواتج القسمة

لاحظنا أننا نستطيع إنشاء الأعداد النسبية من الأعداد الصحيحة بحيث أن حقل الأعداد النسبية يحتوي على ساحة جزئية متشاكلة تقريباً مع ساحة الأعداد الصحيحة. والآن سوف نعمم هذه الظاهرة ونبين أننا نستطيع أن ننشئ حقلاً من ساحة، كما فعلنا عند إنشاء الأعداد النسبية من الأعداد الصحيحة.

إن الحقل الناتج بهذا الأسلوب يدعى حقل نواتج القسمة.





مبرهنة: يمكن إنشاء حقل من عناصر ساحة.

البرهان:

لتكن (د، + ، ٠) ساحة وليكن كل من ﺃ، ب، جـ ... عنصراً في د. نأخذ الأزواج المرتبة (ﺃ، ب) حيث أن ب لا يساوي صفراً.

نعرف علاقة نسميها "تساوي" على مجموعة الأزواج المرتبة من هذا النمط كما يلي: (ﺃ، ب)= (جـ ، د) ⇔ ﺃد = ب جـ

نستطيع بسهولة أن نبين أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ، فهي

ﺃ) انعكاسية حيث أن (ﺃ، ب)= (ﺃ، ب) إذ أن ﺃب= ب ﺃ.

ب) متناظرة حيث أن (ﺃ، ب)= (جـ د) ⟵ (جـ د)= (ﺃ، ب)

لأن ﺃد= ب جـ ⟵ جـ ب= د ﺃ

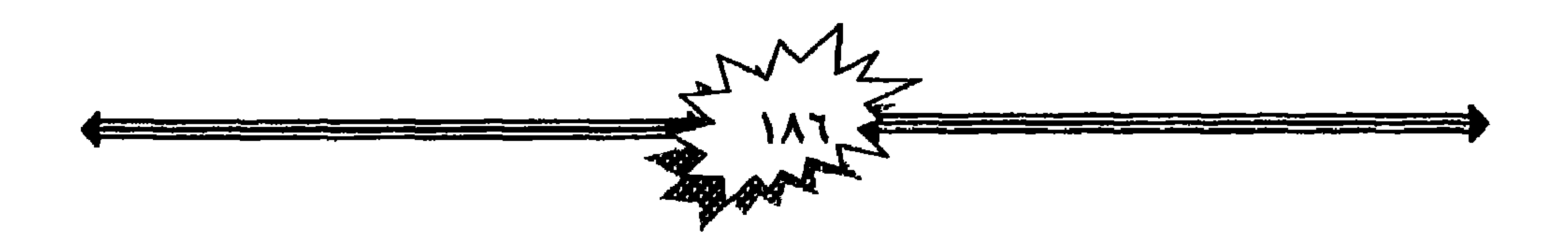
جـ) متعدية حيث أننا لو فرضنا أن (ﺃ، ب)= (جـ د) ينتج ﺃد= ب جـ

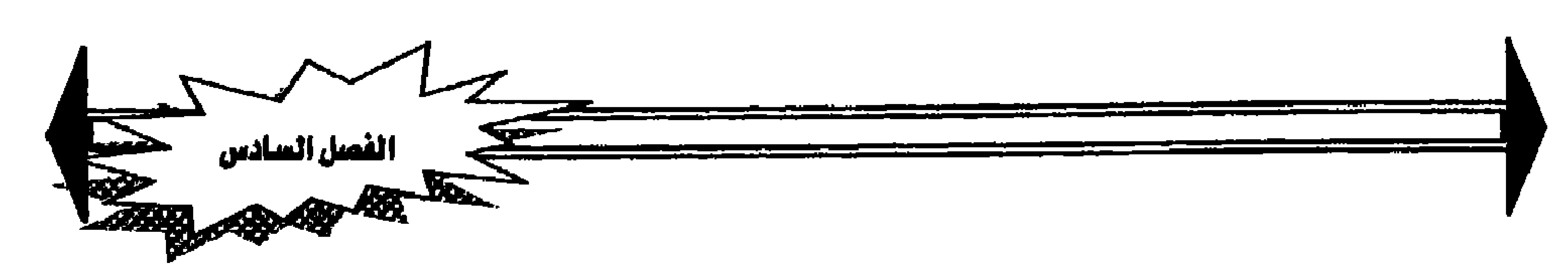
وأن (جـ د)= (و، ق) ينتج جـ ق= دو

ﺃب= دجـ ⟵ ﺃدق = ب جـ ق= ب دو ⟵ ﺃق= ب و

وذلك لكون د ≠ ٠ وهذا يعني أن (ﺃ، ب)= (و، ق)

هذه العلاقة تقسم مجموعة الأزواج المرتبة إلى صفوف تكافؤ. ويمكن تمثيل كل صف من هذه الصفوف، بأي عنصر من عناصر الصف. ليكن كل من (ﺃ، ب)، (جـ د) ممثلاً لصف من الصفوف. نعرف عمليتي جمع وضرب على مجموعة الصفوف كما يلي:





(أ، ب) + (جـ، د) = (أد + ب جـ، ب د)

(أ، ب) . (جـ، د)= (أ جـ، ب د)

سنترك للطالب أن يبرهن أن كلاً من هاتين العمليتين معرفة تعريفاً جيداً. وأن كلاً من العمليتين إبدالية وتجميعية وأن عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع.

وأن الصف المتمثل بالزوج المرتب (٠، أ) وهو العنصر المحايد بالنسبة للجمع حيث أن ٠ هو العنصر المحايد للجمع على الساحة ى. وأن الزوج (-أ، ب) هو النظير الجمعي للزوج (أ، ب).

وأن المحايد الضربي هو (١، ١)، وأن الزوج (ب، أ) هو النظير الضربي للزوج (أ، ب) حيث أن أ ≠ ٠ □.

مبرهنة: حقل نواتج القسمة في ساحة، يحتوي على ساحة جزئية متشاكلة تقريباً مع الساحة الأصلية.

البرهان: لتكن الساحة ى ولنأخذ المجموعة

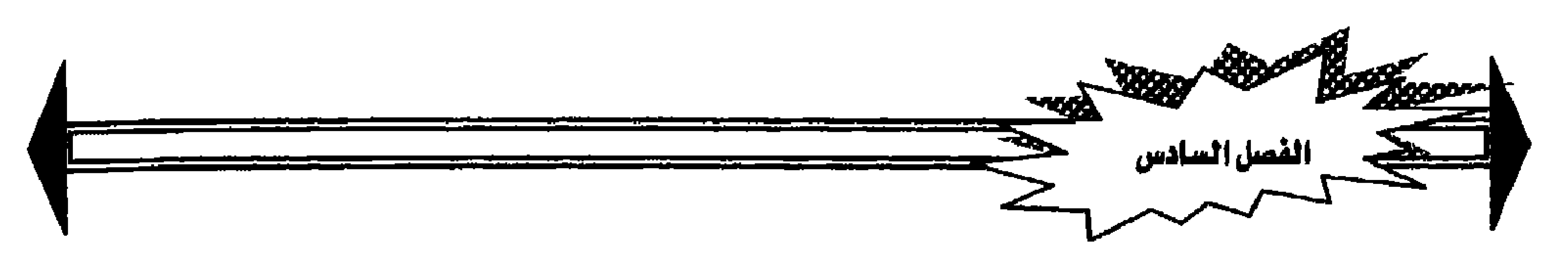
م= {(أ، ١): أ ع ى}

وتعرف دالة من م إلى ى بالقاعدة (أ، ١) ↔ أ

نستطيع أن بين أن هذه الدالة متباينة وشاملة (سنترك ذلك كتمرين للطالب) نلاحظ أن

(أ،١) + (ب،١)= ((أ) (١) + (ب) (١)، (١) (١))= (أ + ب، ١) ↔ أ + ب





وكذلك (أ، ١) . (ب، ١)= (أب، (١) (١))= (أب، ١) ↔ أب

وهذا يني أن الدالة تحافظ على عمليتي الجمع والضرب. أي أنها تشاكل تقابلي □.

قضية: إذا كانت المساحة ى محتواة في حقل ق فإن حقل نواتج القسمة في ى يتشاكل تقابلياً مع حقل جزئي من ق.

لكي نبرهن ذلك نستطيع أن ننشئ التقابل (الدالة المتباينة والشاملة)

(أ، ب) ↔ $\frac{أ}{ب}$ = أب$^{-١}$.

حيث أن كلاً من ب، أ عنصر في ى وأن ب لا يساوي صفراً □.

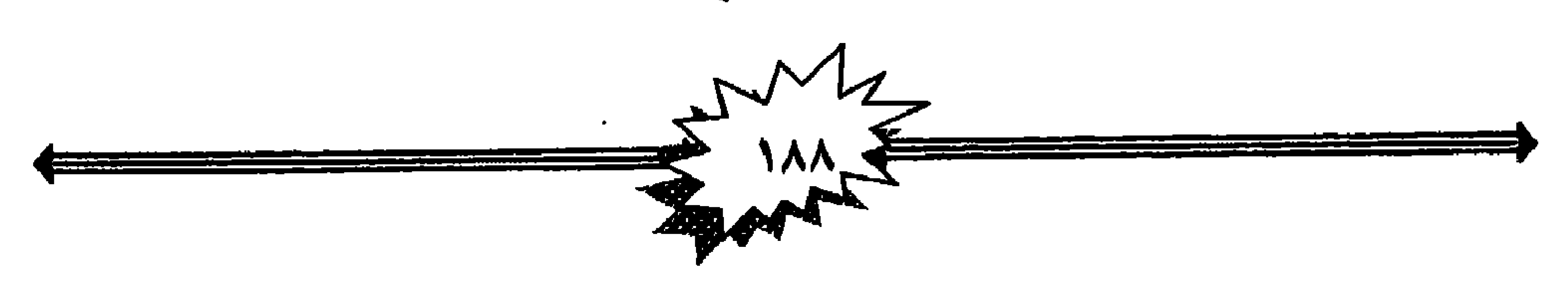
لاحظ أنه – بشكل عام – لا يشترط أن يكون ب$^{-١}$ عنصراً في ى. من الواضح أن تسمية حقل القسمة بهذا الاسم تتطابق مع الواقع. وفوق ذلك يمكن البرهنة على أن حقل نواتج القسمة هو أصغر امتداد للمساحة ى إلى حقل، بمعنى أن أي حقل يحتوي ى، يحتوي أيضاً حقلاً جزئياً يتشاكل تقابلياً مع حقل نواتج القسمة في ى.

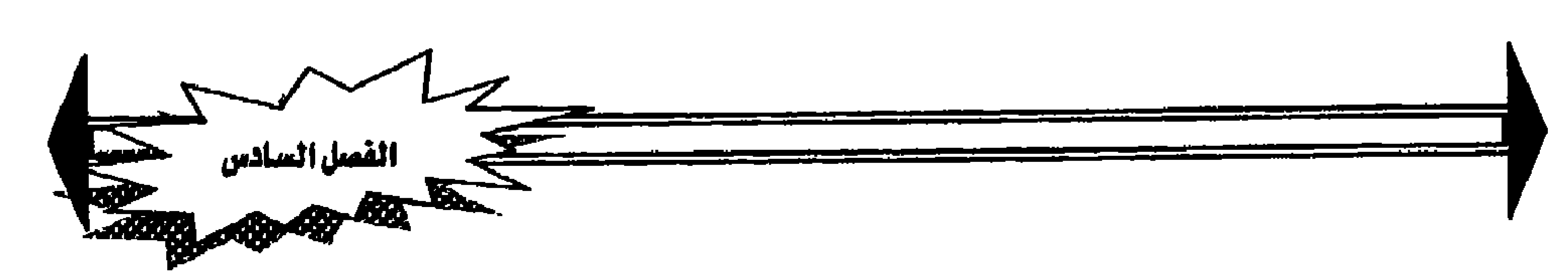
مثال (٣): ليكن ح حقل الأعداد الحقيقية، ط ساحة الأعداد الصحيحة. نعلم أن ط ⊂ ح وأن حقل نواتج القسمة في ط هو حقل الأعداد النسبية وهو حقل جزئي من ح.

مثال (٤): أنشئ حقل نواتج القسمة في الساحة ط٥.

الحل: لاحظ أن صفوف التكافؤ هي

٠: {(٠، ١)، (٠، ٢)، (٠، ٣)، (٠، ٤)}





١: {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)}

٢: {(٢، ١)، (١، ٣)، (٤، ٢)، (٣، ٤)}

٣: {(٣، ١)، (١، ٢)، (٤، ٣)، (٢، ٤)}

٤: {(٤، ١)، (٣، ٢)، (٢، ٣)، (١، ٤)}

فنجد أن حقل نواتج القسمة في طه هـ طه.

مبرهنة:

الساحة التي يكون مميزها صفراً تحتوي على ساحة جزئية متشاكلة تقابلياً مع ط، والساحة التي يكون مميزها العدد الأولي ن تحتوي على مجموعة جزئية تشكل حقلاً يتشاكل تقابلياً مع طن.

البرهان:

لتكن ى ساحة وليكن هـ المحايد الضربي في ى.

لتكن <هـ> هي الزمرة الدائرية المتولدة من العنصر هـ.

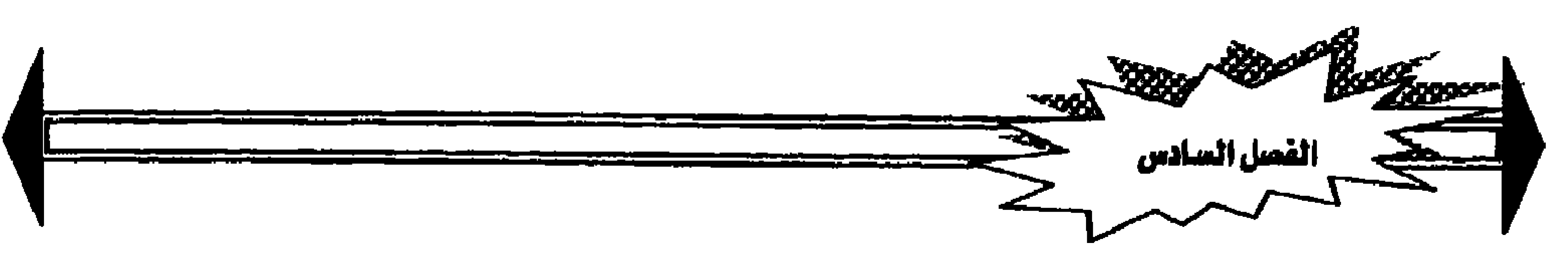
إما أن تكون <هـ> غير منتهية أو تكون منتهية ورتبتها ن (عدد أولي)

(لأنه إذا لم يكن ن عدد أولياص فستحصل على قواسم الصفر في ى)

إذا كانت <هـ> غير منتهية، تكون العناصر كم متمايزة حيث أن ك عدد صحيح.

لتكن م مجموعة جزئية من ى معرفة كما يلي: م= {كم: ك ع ط}





نترك للطالب أن يبرهن على أن ط مع عمليتي الجمع والضرب، ساحة جزئية من ى.

نعرف دالة من م إلى ط بالقاعدة كهـ ⟵ ك

من الواضح أن هذه الدالة متباينة وشاملة. ولكي نبرهن أنها تشاكل تقابلي نلاحظ أنه

لو كان رهـ ↔ ر وكان م هـ ↔ م فإن

رهـ + م هـ = (ر + م)م ↔ ر + م

وكذلك (رهـ) (م هـ)= (رم)هـ ↔ رم

أي أن هذه الدالة تحافظ على العمليتين، إذاً فهي تشاكل تقابلي.

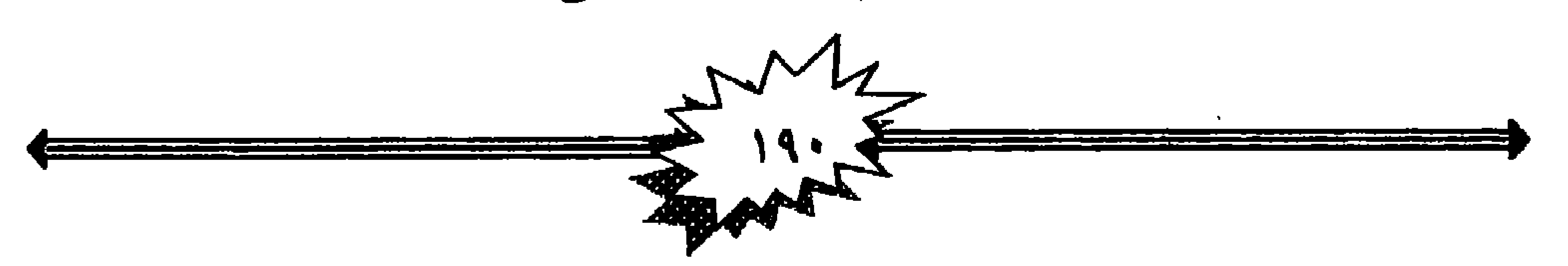
ولذا فإن الساحة الجزئية م متشاكلة تقابلياً مع ط.

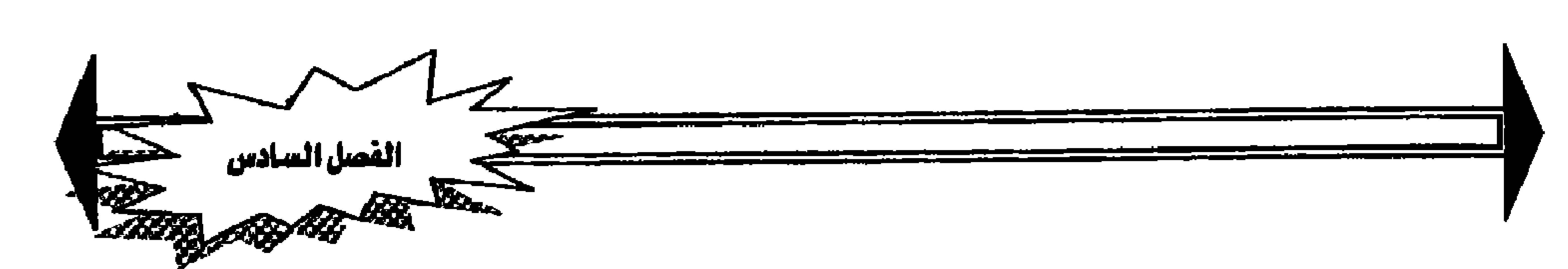
أما إذا كانت رتبة الزمرة <هـ> تساوي ن. فإن العنصر كهـ لن تكون جميعها متمايزة وسيكون ك١هـ= ك٢هـ إذاً وفقط إذا كان ك١، ك٢ متطابقين بالنسبة للمعيار ن. في هذه الحالة نقرن كهـ مع جـك حيث أن جـك هو صف التكافؤ الذي ينتمي إليه ك. وسنترك للطالب أن يجد التشاكل التقابلي بين العناصر كهـ وبين صفوف التكافؤ بالنسبة للمعيار ن، أي عناصر طن □.

مبرهنة: في أي ساحة ى، كل عنصر غير صفري يولد زمرة دائرية مع عملية الجمع، وكل هذه الزمر لها الرتبة نفسها.

البرهان: ليكن هـ هو المحايد الضربي في ى، ليكن أ أي عنصر غير صفري في ى.

وإذا كان مميز ى هو العدد الأولي ن فإننا نستطيع أن نبين بسهولة أن





ن ؋ = ن(؋ هـ) = ن(هـ ؋) = (ن هـ) ؋ = (٠) ؋ = ٠

إضافة إلى ذلك، إذا كان س ؋ = ٠ حيث أن كل من س و ؋ يختلف عن الصفر فإن س ؋ = س(هـ ؋) = (س هـ) ؋ = ٠

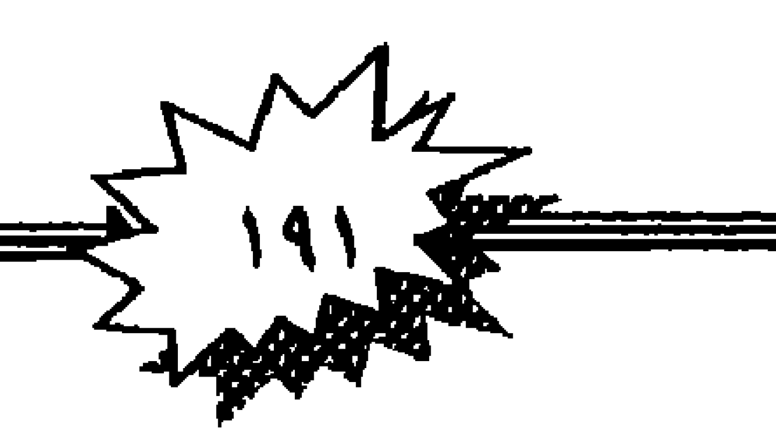
لذا وجب أن يكون س هـ = ٠ وهذا يؤدي إلى أن س = كن، حيث ك عدد صحيح، أما إذا كان مميز الساحة صفراً، فإن س ؋ ≠ ٠ إذا كان كل من ؋ و س يختلف عن الصفر، لأن س ؋ = (س هـ) ؋ وإذا كان س يختلف عن الصفر فإن س هـ ≠ ٠ □.

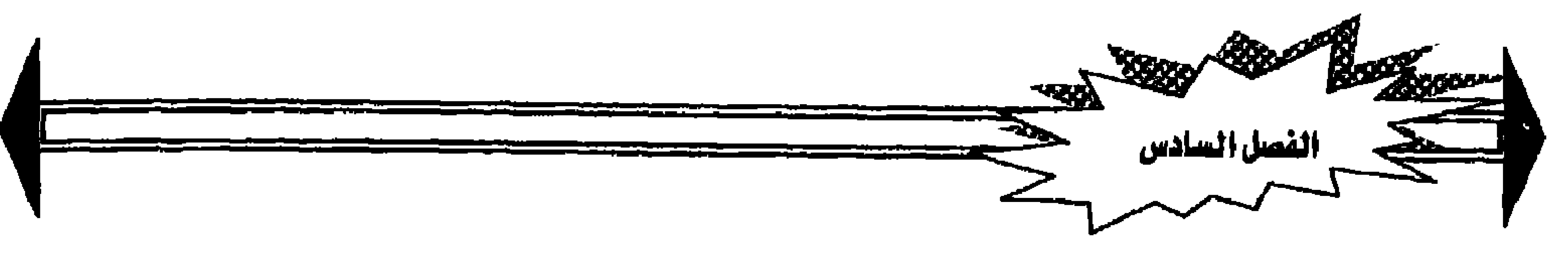
لاحظنا في برهان المبرهنة السابقة أن المضاعفات للمحايد الضربي في ساحة، تشكل ساحة جزئية. نستطيع أن بين أن حقل نواتج القسمة في هذه الساحة الجزئية يتشاكل تقابلياً مع طن إذا كان مميز الساحة الأصلية ن. ويتشاكل تقابلياً مع حقل الأعداد النسبية ن إذا كان مميز الساحة الأصلية صفراً. أي أن الحقل يحتوي على حقل جزئي يتشاكل تقابلياً أما مع طن أو مع حقل الأعداد النسبية ن.

القسمة في ساحة

سنعطي الآن بعض التعاريف والتسميات وسنرى أنها مشابهة لما يناظرها من تعاريف وتسميات حول قابلية القسمة وخواصها للأعداد الصحيحة.

؋) القاسم. أي عنصر ب ≠ ٠ في ساحة ٯ يكون قاسماً لعنصر ؋ في ٯ. إذا وجد عنصر جـ في ٯ بحيث أن ؋ = ب جـ.





ب) العناصر المشاركة والوحدات. لتكن ى ساحة يقال لعنصرين أ و ب يختلفان عن الصفر بأنها مشاركان إذا كان أ قاسماً للعناصر ب وكان ب قاسماً للعنصر أ.

أما عنصر الوحدة. فعنصر مشارك للمحايد. الضربي في ى.

مثال (٥): العنصران ٢ و ٣ في ط٥ عنصران مشاركان إذ أن ٢ يقسم ٣ لأن ٢. ٤= ٣ وكذلك ٣ يقسم ٢ لأن ٣. ٤= ٢.

كل من العناصر ١ و ٢ و ٣ و ٤ وحدة في ط٥. لأن لها نظائر ضربية فمثلاً ٣ هو النظير الضربي للعنصر ٢، إذاً ٢= ١. ٢ أي أن ١ يقسم ٢ وكذلك ٣. ٢ = ١ أي أن ٢ يقسم ١.

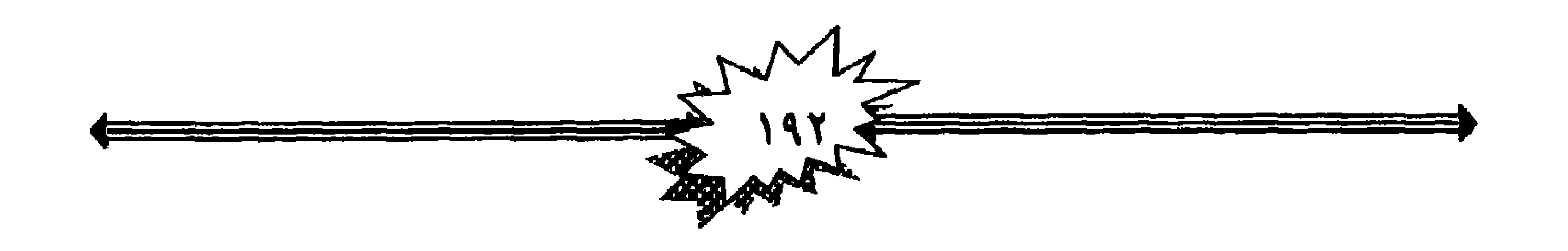
مبرهنة: لتكن ى ساحة، يكون العنصر أ في ى وحدة إذاً وفقط إذا كان له نظير ضربي.

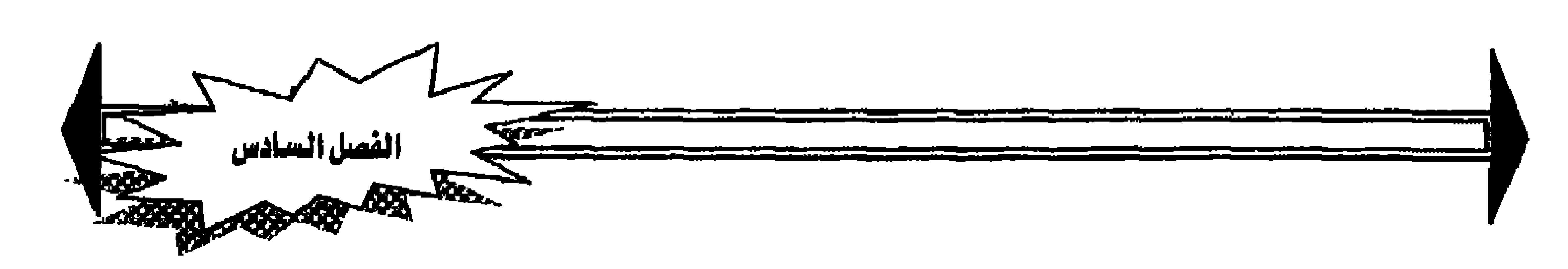
البرهان:

إذا كان العنصر أ وحدة، فهو قاسم للعنصر المحايد ١. إذاً يوجد ب في ى بحيث أن أب= ١. وهذا يعني أن ب نظير ضربي للعنصر أ.

من الناحية الثانية، إذا كان العنصر نظيراً ضربياً للعنصر أ فإن أب= ١ وهذا يعني أن أ يقسم ١، وبما أن ١ يقسم كل العناصر في ى (لأن أ. ١= أ) إذا يكون العنصر أ وحدة في ى □.

مبرهنة: لتكن ى ساحة يكون عنصران في ى مشاركين إذاً وفقط إذا كان أحدهما مساوياً لحاصل ضرب الآخر في عنصر وحدة.





البرهان:

ليكن العنصران ا و ب مشاركين في ى. فيوجد جـ و د في ى بحيث أن

ا= ب جـ و ب= اد لذا يكون ا= ادجـ

وبما أن ا= ا. ١ ، إذا ا. ١= ادجـ

وهذا يؤدي إلى أن دجـ= ١. أي أن كلا جـ، د عنصر وحده في ى.

ولكي نبرهن الاتجاه الآخر، نفرض أن ب= الَ حيث لَ وحدة بحيث أن ل لً= ١ فإن ب يقسم ا لأن ا= ا. ١= ا(لَ لً)= (الَ)لً= ب لً. □

لاحظ أننا نبرهن أيضاً أن أي عنصر ا يقبل القسمة على وحدات المساحة.

القواسم الفعلية والقواسم التافهة

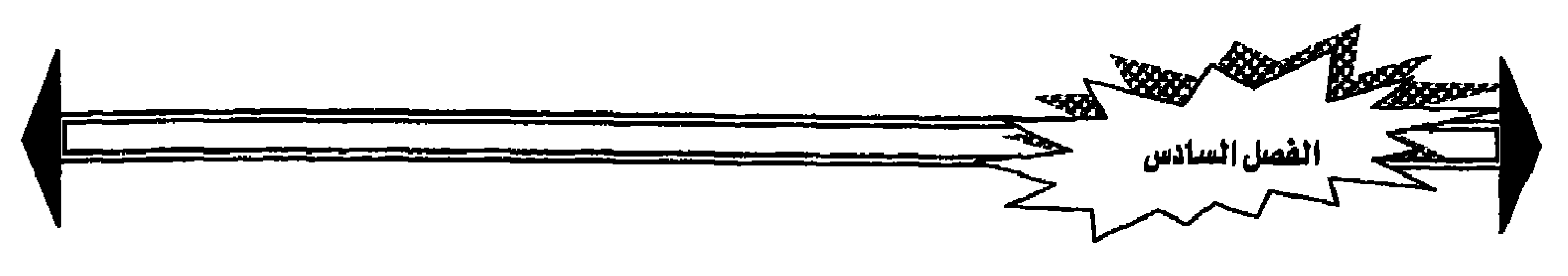
أي عنصر ا في ساحة ى (ا يختلف عن الصفر) يقبل القسمة على العناصر المشاركة له وعلى الوحدات في المساحة. هذه القواسم للعنصر ا تسمى القواسم التافهة للعنصر ا. كل القواسم الأخرى إن وجدت تسمى قواسم مغلية.

العناصر الأولية أو غير القابلة للاختزال:

إذا كان ا عنصراً غير صفري في ساحة ى بحيث أن ا ليس عنصر وحدة في ى وليس للعنصر ا قواسم فعلية في ى. فإننا نقول أن ا عنصر غير قابل للاختزال وإذا كان لعنصر قواسم فعلية فإننا نقول أنه قابل للاختزال.

مثال (٦): لتكن ى ساحة. في ساحة متعددات الحدود ى[س] فالوحدات هي وحدات المساحة ى.





الحل:

ليكن كل من ق(س) و ك(س) عنصراً في ى[س] بحيث أن ق(س) ك(س)= ١. بما أن درجة حاصل ضرب متعددي حدود تساوي مجموع درجتيهما. إذاً يجب أن تكون درجة كل من ق(س)، ك(س) مساوية للصفر أي أن كلاً من ق(س)، ك(س) متعدد حدود ثابت.

مثال (٧): متعدد الحدود س^{٢}−٢ غير قابل للاختزال في حقل الأعداد النسبية ولكن (س−$\sqrt{٢}$)(س+$\sqrt{٢}$)=س^{٢}−٢ يبين أن س^{٢}−٢ قابل للاختزال في حقل الأعداد الصحيحة. لذا فإن قابلية الاختزال تعتمد على الساحة.

مثال (٨): لتكن و={أ+ب$\sqrt{١٣}$: أ،ب ∈ ط} ولتكن α=أ+ب$\sqrt{١٣}$ نعرف ن(α)=(أ+ب$\sqrt{١٣}$)(أ−ب$\sqrt{١٣}$)=أ^{٢}−١٣ب^{٢} ∈ ط

(ن(α) يدعى مقياس α (norm)). برهن أن:

أ) ن(α β)= ن(α) ن(β)

ب) العنصر α عنصر وحدة إذاً وفقط إذا كان ن(α)= ± ١

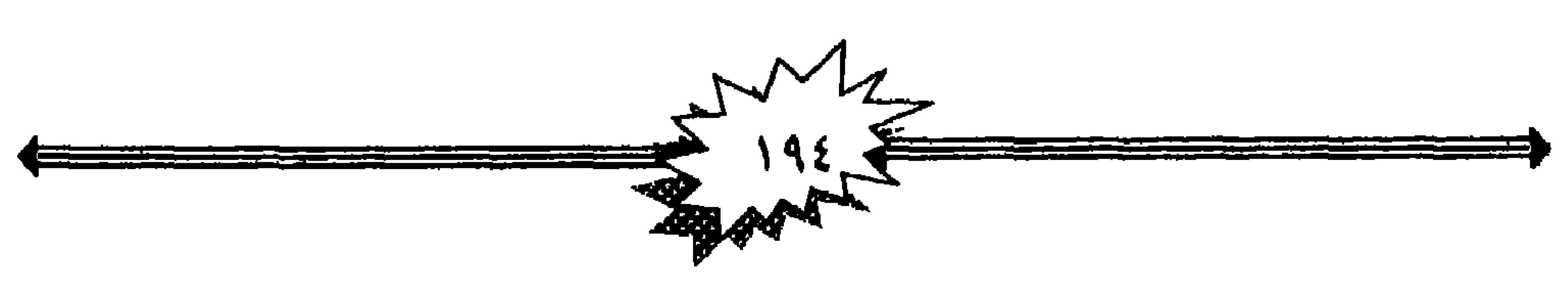
جـ) كلاً من ١−٥$\sqrt{١٣}$ و −١٨−٥$\sqrt{١٣}$ عنصر وحدة في و.

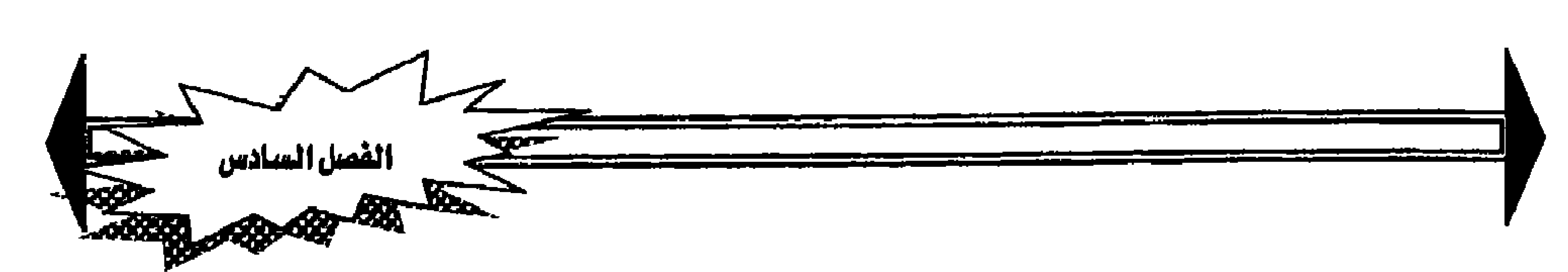
د) ١+$\sqrt{١٣}$ و −٤٧+١٣$\sqrt{١٣}$ عنصران مشاركان ولكن أي منهما وليس عنصر وحدة.

هـ) كل من ٢، −٣−$\sqrt{١٣}$، ٣−$\sqrt{١٣}$ عنصر أولي في و.

الحل:

ب) إذا كانت ن(α)= ± ١ فإن العنصر α يكون عنصر وحدة لأن





$(\text{أ}+\text{ب}\sqrt{13})(\text{أ}-\text{ب}\sqrt{13})=1$ أي أن $\alpha=\text{أ}+\text{ب}\sqrt{13}$ يقسم ١. وإذا كان العنصر α عنصر وحدة فيوجد β بحيث أن $\alpha\ \beta=1$، إذاً ن$(\alpha\ \beta)$= ن(α) ن(β)= ١.

وبما أن كلاً من ن(α)، ن(β) عدد صحيح فإن ن$(\alpha)=\pm1$ وكذلك ن$(\beta)=\pm1$

هـ) ليكن $\alpha\ \beta=2$، إذاً ن(β) ن(α)= ن$(\beta\ \alpha)$= ٤

لذا فإن العنصر الأولي ٢ يقسم ن(α) أو يقسم ن(β)

لنفرض أن ٢ يقسم ن (α) ويكون العنصر β عنصر وحدة. لذا فإن α قاسم فعلي. ليكن ن$(\alpha)=\pm2$ فإن $\text{أ}^2-13\text{ب}^2=\pm2$ وهذا يعني أن $\text{أ}^2=\pm2$ (mod ١٣) وبالتعويض نجد أن هذا التطابق لا حل له. لذا فإن ٢ عنصر أولي في الساحة و.

وبالأسلوب نفسه نكمل البرهان لهذا الفرع.

لاحظ أن $4=2.2=(-3-\sqrt{13})(3-\sqrt{13})$

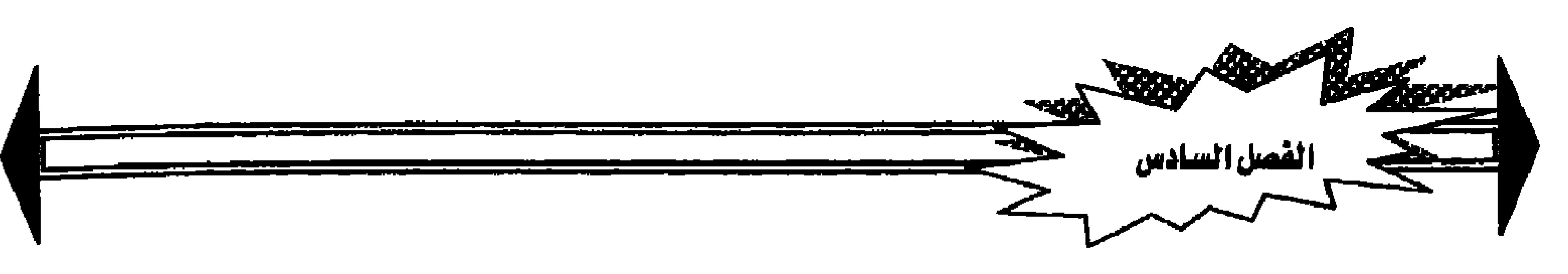
أي أن التحليل الوحيد إلى عوامل أولية لا يصح في الساحة و.

قضية: في أية حلقة إبدالية تكون العناصر ذات المعكوس مع عملية الضرب زمرة إبدالية.

البرهان:

ليكن العنصران ل_1، ل_2 في ح* وليكن $\text{ل}_1\text{ع}_1=1$، $\text{ل}_2\text{ع}_2=1$ فإن $(\text{ل}_1\text{ل}_2)(\text{ع}_1\text{ع}_2)=1$ أي أن $\text{ل}_1\text{ل}_2$ ينتمي إلى ح*. ونستطيع بسهولة أن نكمل البرهان □.





قد يحصل أن يكون لعنصرين في حلقة إقليدية عدة قواسم مشتركة عظمى. فمثلاً في ن(س) يكون كل من س+١، ٢س+٢، $\frac{١}{٣}$س+$\frac{١}{٣}$ قاسماً مشتركاً أعظماً لمتعددي الحدود س^{٢}+ ٢س+ ١ و س^{٢}-١. ورغم اختلاف هذه القواسم المشتركة العظمى يمكننا أن نجد عنصراً ذا معكوس ن، بحيث لو ضربناه في أحدها لحصل على آخر.

مبرهنة تمهيدية: ليكن العنصر ؟ قاسماً لـ ب والعنصر ب قاسماً لـ ؟ في ساحة ح. فإن ؟= ل ب حيث أن ل عنصر (قابل للعكس).

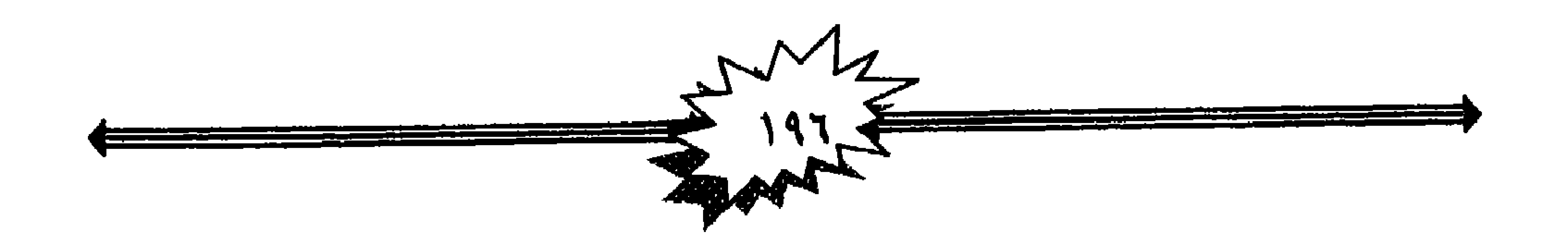
البرهان: بما أن ؟ يقسم ب فإن ب= ع ؟ حيث أن ع ينتمي إلى ح وكذلك ؟= ل ب لكون ب قاسماً لـ ؟، حيث ل ينتمي إلى ح. لذا يكون ؟= ل ب = ل ع ؟

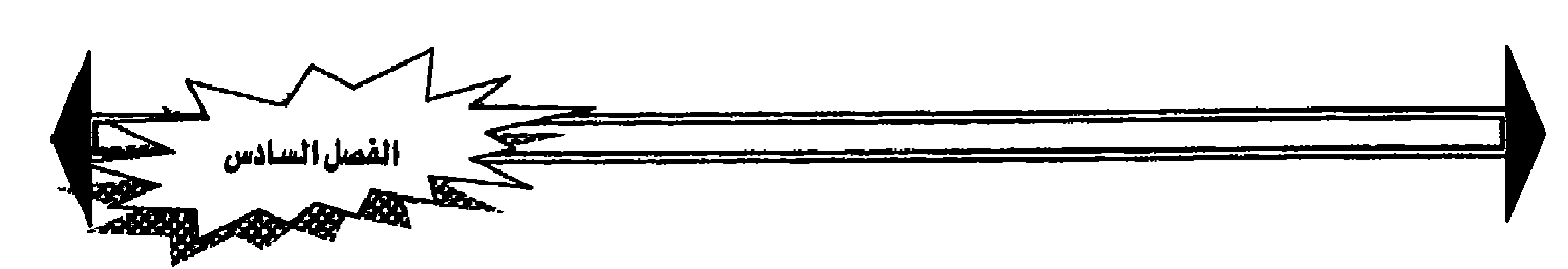
إذاً ؟(ل ع-١)= ٠ فإذا كان ؟= ٠ فإن ب= ٠ وإذا كان ؟ ≠ ٠ فإن ل ع – ١= ٠ لعدم وجود قواسم للصفر في ح. أي أن ل ع= ١ وهذا يعني أن ل عنصر ذو معكوس □.

مبرهنة تمهيدية: إذا كان العنصر ك$_{٢}$ قاسماً مشتركاً أعظماً لـ ؟، ب في حلقة إقليدية ح، فإن ك$_{١}$ يكون قاسماً مشتركاً أعظماً لـ ؟، ب إذاً وفقط إذا كان ك$_{١}$= ل ك$_{٢}$ حيث أ، ل عنصر ذو معكوس.

البرهان:

إذا كان ك$_{١}$= ل ك$_{٢}$ حيث أن ل ع= ١ فإن ك$_{٢}$= ع ك$_{١}$. لذا يكون ك$_{٢}$ قاسماً لـ ك$_{١}$ ويكون ك$_{١}$ قاسماً لـ ك$_{٢}$ إذاً وفقط إذا ك$_{١}$ = ل ك$_{٢}$.





نستطيع الآن أن نحصل على النتيجة المطلوبة باستخدام تعريف القاسم المشترك الأعظم □.

مبرهنة تمهيدية: إذا كان كل من ؟، ب عنصراً في حلقة إقليدية ح، فإن د(؟)- د (؟ب) إذا كان ب عنصراً ذا معكوس. وبخلاف ذلك يكون د(؟) $<$ د(؟ب).

البرهان:

إذا كان ب ذا معكوس وكان ب جـ= ١ فإن

د(؟) $\geq$ د(؟ب) $\geq$ د(؟ب جـ)= د(؟)

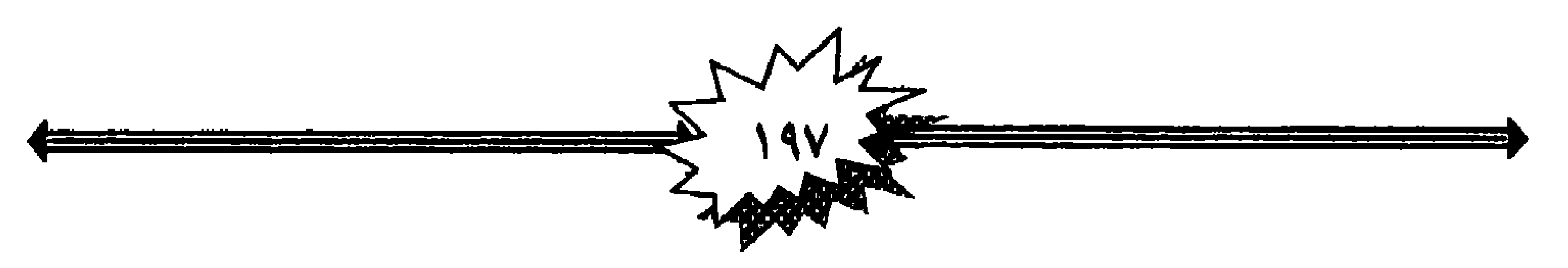
وهذا يعني أن د(؟)= د(؟ب). إذا لم يكن ب ذا معكوس، فإن ؟ب لا يقسم ؟ وأن ؟= ي ؟ب + ر حيث أن د(ر) أصغر من د(؟ب).

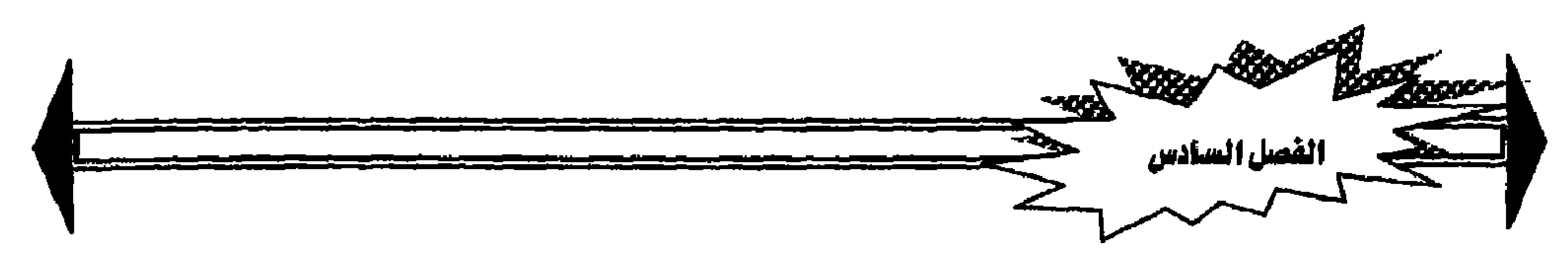
ر= ؟(١- ي ب) $\Longrightarrow$ د(؟) $\geq$ د(ر) $\Longrightarrow$ د(؟) $\geq$ د(؟ب)

تعريف: يقال لعنصر ن في حلقة إقليدية ح بأنه أولي أو غير قابل للاختزال (Irreducible) إذا كان غير قابل للعكس وكان ن= ؟ب يؤدي إلى أن إما ؟ أو ب ذو معكوس في ح.

إن العناصر الأولية (أو غير القابلة للاختزال) في حلقة الأعداد الصحيحة هي الأعداد الأولية ونظائرها الجمعية.

مبرهنة تمهيدية: لتكن ح حلقة إقليدية. إذا كان كل من ؟، ب، جـ عنصراً في ح وكان القاسم المشترك الأعظم للعنصرين ؟، ب يساوي ١. وكان ؟ يقسم ب جـ، فإن ؟ يقسم جـ.





البرهان:

برهنا سابقاً أن أي عنصرين في حلقة إقليدية لهما قاسم مشترك أعظم يمكن تمثيله بتركيبة خطية من العنصرين.

والآن، بما أن ق. م. أ للعنصرين أ، ب يساوي ١. فيوجد ت، س في ح بحيث أن س أ+ ت ب= ١

إذاً س أ جـ ≠ ت ب جـ= جـ (بضرب الطرفين في جـ)

وبما أن أ يقسم ب جـ فإن أ يقسم الطرف الأيمن. إذاً يجب أن يكون أ قاسماً للعنصر جـ. □

قضية: إذا كان ن عنصراً أولياً في حلقة إقليدية ح وكان ن يقسم أب فإن ن يقسم أ أو ن يقسم ب.

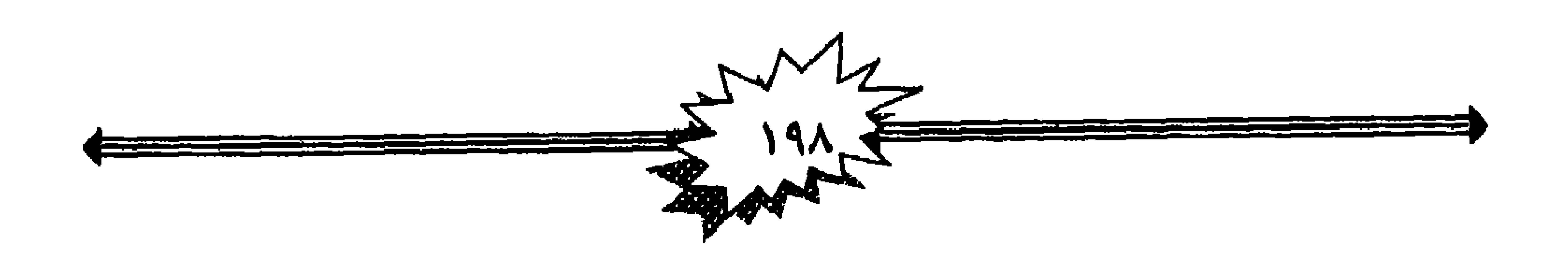
البرهان:

ليكن ق. م. أ للعنصرين د= أ، ب إذاً لكل أ في ح، د/ ن إذا ن= د، هـ.

إذا كان العنصر ن أولياً، فأما د أو هـ يكون ذا معكوس. لذا يكون ى= ١ أو ى= ن.

فإذا لم يكن ن قاسماً لـ أ فإن د= ١ وحسب التعريف السابق يكون ن قاسماً لـ ب □.

مبرهنة التحليل الوحيد: كل عنصر غير صفري في حلقة إقليدية ح إما أن يكون ذا معكوس أو يمكن كتابته كحاصل ضرب عدد منته من العناصر الأولية.



وفي حاصل ضرب من هذا النوع تتجدد العناصر الأولية بشكل وحيد إذا أغفلنا الترتيب الذي تظهر فيه وكونها مضروبة بعناصر ذات معكوس.

البرهان:

سوف نبرهن بالاستقراء على ى(أ) حيث أن أ في ح. أن أقل قيمة لـ د(أ) لعنصر غير صفري أ هي د(١) لأن (١) يقسم كل العناصر الأخرى، نفرض أن د(١)= د(أ).

فإن د(١)= د(١. أ) وهذا يؤدي إلى أن أ ذو معكوس.

والآن – للاستقراء – نفرض أن كل العناصر س في ح التي تحقق الشرط د(س) < د(أ) هي عناصر ذات معكوس أو يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب عناصر أولية. وسنبرهن الآن أن هذه يصبح على أ.

إذا كان العنصر أ أولياً فليس لدينا ما نبرهنه. وإذا لم يكن كذلك فنستطيع القول بأن أ= ب جـ حيث أن أياً من ب، جـ لا يكون ذا معكوس. من هذا ينتج:

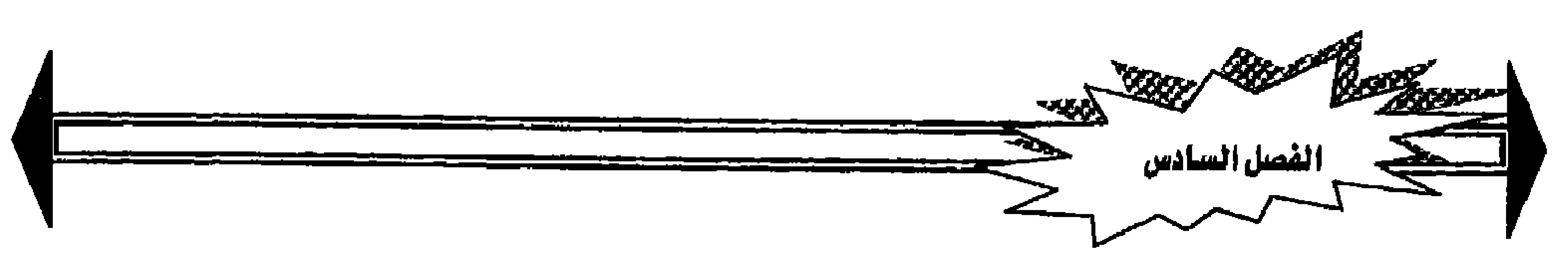
د(ب) < د(ب جـ)= د(أ)

د(جـ) < د(ب جـ)= د(أ)

وحسب فرضية الاستقراء. فإن كلاً من ب، جـ يمكن التعبير عنه كحاصل ضرب من العناصر الأولية.

بقي علينا أن نبرهن الوحدانية. نفرض أن:

$أ = ن_1 ن_2 \ldots ن_ن = ك_1 ك_2 \ldots ك_م$.



حيث أن كل من $ك_ي$، $ك_ر$ عنصر أولي. والآن نلاحظ أن $م/ن_١$ لذا $ن_١ك_١ك_٢...ك_م$ أي أن $ن_١$ يقسم واحد من العوامل $ن_١$ وبتغيير من الترتيب، إذا اقتضى الأمر ونستطيع أن نقول أن $ن_١/ك_١$. إذاً $ك_١= ل_١ن_١$ حيث أن $ل_١$ ذو معكوس وذلك لكون كل من $ك_١$، $ل_١$ أولياً. أصبح الآن لدينا $م= ن_١ن_٢.... ن_ن$ $= ل_١ن_١ ك_٢ك_٣... ك_م$

لذا يكون:

$ن_٢.... ن_ن= ل_١ك_٢ك_٣... ك_م$

وبمواصلة هذا النهج نستطيع أن نبين أن:

$ن_ي= ل_يك_ي$ لكل ي، حيث أن كل $ل_ي$ عنصر ذو معكوس.

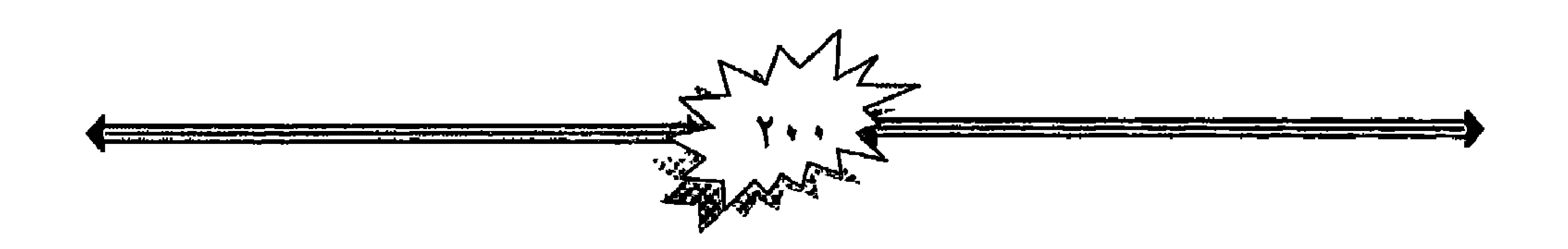
فإذا كان العنصر م < ن، فسنحصل على علاقة من النوع $ن_{م+١}.....$ $ن_ن= ل_١ل_٢....ل_م$

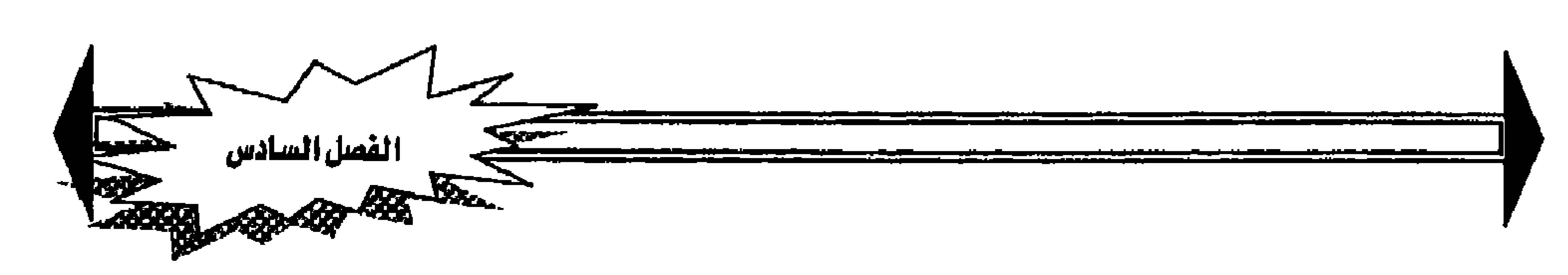
وهذا غير ممكن لأن العناصر الأولية لا يمكن أن تقسم عنصراً ذا معكوس. وإذا كان م > ن فسنحصل على $١= ل_١ل_٢.... ل_ن ك_{ن+١}..... ك_م$

وهذا أيضاً غير ممكن لأن العناصر الأولية لا يمكن أن تقسم ١. لذا وجب أن يكون م = ن والعناصر الأولية $ن_١ن_٢.... ن_ن$ هي $ك_١$، $ك_٢$، .... ، $ك_م$ مع احتمال الاختلاف في الترتيب والضرب في عناصر ذات معكوس □.

إذا كانت الحلقة الإقليدية هي حلقة الأعداد الصحيحة، فإن مبرهنة التحليل الوحيد تؤدي إلى المبرهنة الأساسية للحساب.

إن حلقة متعددات الحدود على الحقل ولذلك حلقة الأعداد الصحيحة





الكاوسية (Coussion Indegers) تمتلكان خاصية التحليل الوحيد.

أما المساحة $ط[\sqrt{-3}] = \{أ + ب\sqrt{-3} : أ، ب \in ط\}$

وهي حلقة جزئية من جـ فلا تمتلك هذه الخاصية. فمثلاً:

$٤ = ٢.٢ = (١ + \sqrt{-3})(١ - \sqrt{-3})$

علماً بأن ٢، $\sqrt{-3}+1$ ، $1-\sqrt{-3}$ كلها أولية. لذا فإن $ط[\sqrt{-3}]$ لا يمكن أن تكون حلقة إقليدية.

تمارين:

١- جد النظير الضربي لكل عنصر غير صفري في:

(أ) $ط_٥$ ، (ب) $ط_{١١}$ ، (جـ) $ط_{١٣}$ ، (د) $ط_{١٧}$

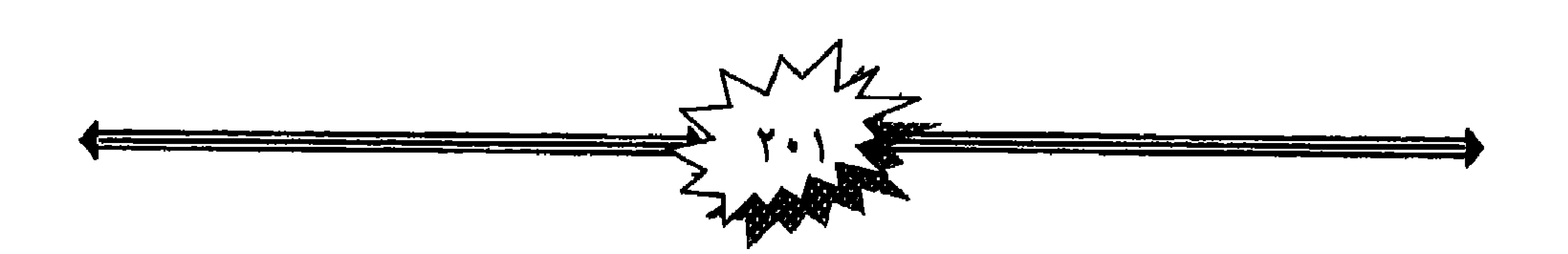
٢- في الحقل $ط_{١٨٤٧}$، جد النظير الضربي لكل من ١٢، ٣٠، ١٠٠، ٤٣١.

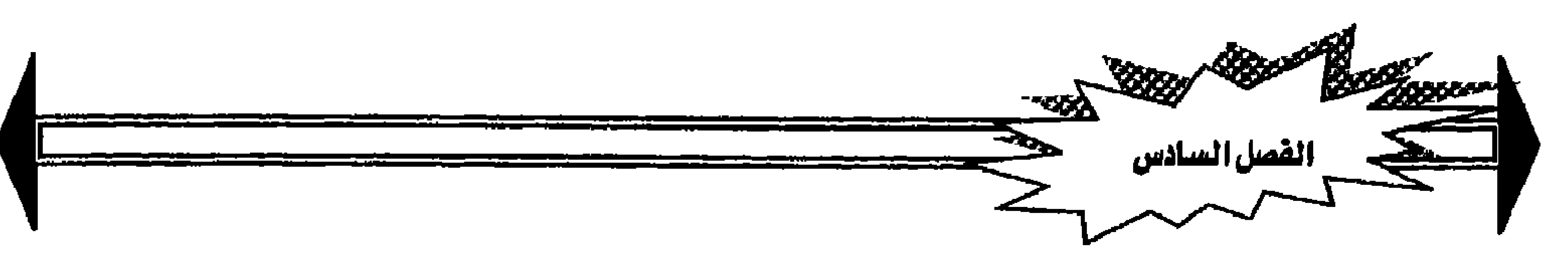
٣- لتكن ق حقلاً. بين أن وحدات الحقل هي جميع عناصر ق عدا الصفر.

٤- لتكن ق حقلاً. في ساحة متعددات الحدود ق[س]، بين أن العناصر المشاركة لمتعدد الحدود ق(س) هي جـ ق(س) حيث أن جـ أي عنصر في ق/ {٠}.

٥- في المساحة ط، بين أن العناصر غير القابلة للاختزال هي الأعداد الأولية.

٦- هات مثالاً يبين أنه ليس كل حقل منته يجب أن يكون على الشكل $ط_ن$ حيث أن ن عدد أولي.





٧- إذا كانت ح حلقة إبدالية غير تافهة وكان لكل أ، ب في ح، أ ≠ ٠ يوجد س في ح بحيث أس= ب، فإن ح حقل.

[تلميح: برهن أولاً أن الحلقة ح لا تحتوي على قواسم للصفر. ثم خذ جـ و د في ح/ {٠} فنوجد ت و م في ح بحيث جـ. م= جـ و د. ت= د. برهن أن ت= م وهذا يعني وجود عنصر محايد للضرب في ح].

٨- لتكن ن مجموعة كل الأعداد الحقيقية الموجبة، وليكن ك عنصراً محدداً في ن، ك ≠ ١ وليكن كل من أ، ب عنصراً في ن، نعرف عملية جمع (+) وعملية ضرب (٠) على ن كما يلي:

أب= أ+ب (عملية الضرب الاعتيادية)

$أ.ب=أ^{لو_{ك}ب}$ برهن أن (ن، +، ٠) حقل.

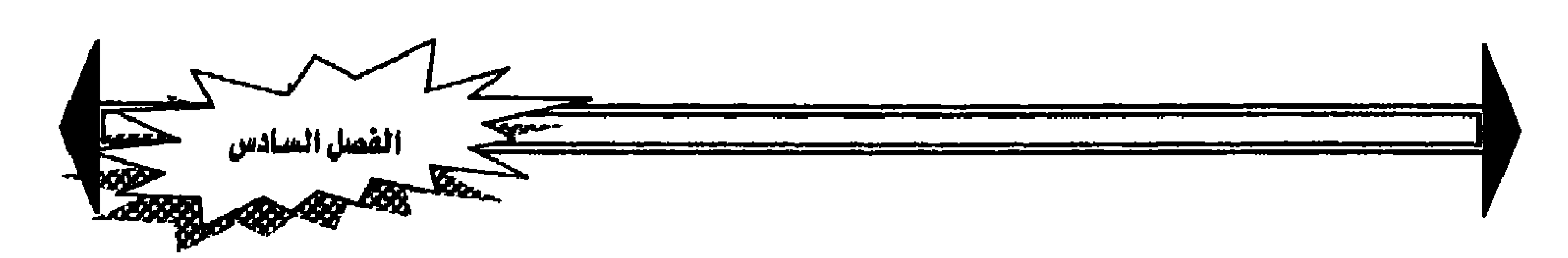
امتداد الحقل

تعريف: ليكن ق حقلاً يسمى الحقل ك امتداداً للحقل ق أو الحقل ق يسمى حقلاً جزئياً في الحقل ك إذا كان ق ⊂ ك.

مثال (٩): حقل الأعداد النسبية ن هو حقل جزئي في حقل الأعداد الحقيقية ح أو حقل الأعداد الحقيقية ح امتداد لحقل الأعداد النسبية ن. وكذلك فإن حقل الأعداد العقدية امتداد لكل من ح و ن.

مبرهنة: إذا كان الحقل ك امتداداً للحقل ق فإن ك فضاء متجهات (Vector space) على ق.





البرهان:

نلاحظ أن (ك،+) زمرة إبيلية لأن ك حقل. نلاحظ أيضاً أن الشروط التالية تحقق:

أ) إذا كان العنصر ١ هو العنصر المحايد في ق، فإن ١ك= ك لكل العناصر ك في ك.

ب) إذا كان كل من ل، ك عنصراً في ك، وكانت ف عنصراً في ق فإن ف(ك + ل)= ف ك+ق ل.

جـ) إذا كان كل من هـ، ف عنصراً في ق وكان العنصر ك عنصراً في ك فإن (ف+هـ)ك= ف ك + هـ ك

د) إذا كان كل من هـ، ف عنصراً في ق وكان ك عنصراً في ك فإن (ف هـ)ك= ف(هـ ك) إذاً ك فضاء متجهات على ق□.

تعريف: إذا كان الحقل ك امتداد للحقل ق فإن درجة ك على ق ونكتب [ك: ق] هي عدد إبعاد (dimension) فضاء المتجهات ك على الحقل ق.

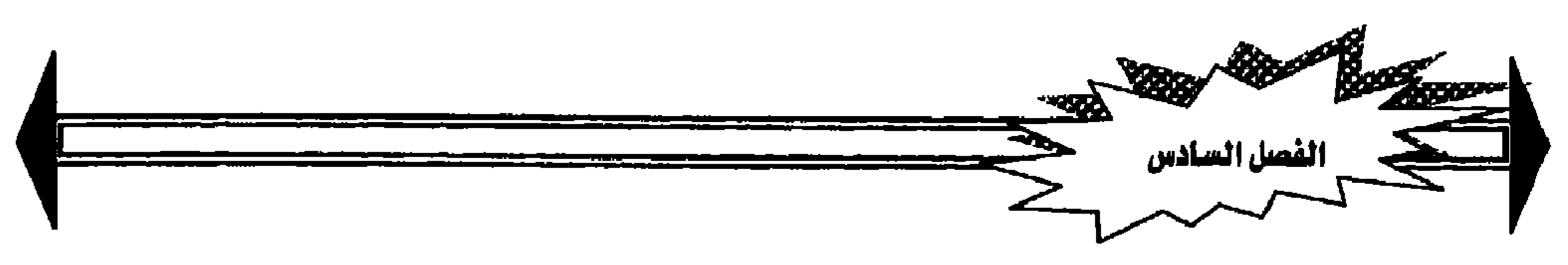
مثال (١٠): إذا كان ح و جـ حقلي الأعداد الحقيقية والأعداد العقدية على التوالي فإن [جـ: ح]= ٢.

الحل:

نعرف أن جـ= {(أ، ب): أ، ب ∋ ح} بما أن (أ، ب)= أ(١، ٠) + ب(٠، ١)

لكل العناصر أ، ب في ح. فإن (١، ٠) و (٠، ١) يولدان الحقل جـ.





بما أن هـ (١، ٠) + ك(٠، ١)= (٠، ٠) ⟵ (هـ، ٠) + (٠، ك)= (٠، ٠)

⟵ (هـ، ك)= (٠، ٠) ⟵ هـ = ك = ٠

فإن {(٠، ١)، (١، ٠)} أساس (basis) لفضاء المتجهات جـ على ح. إذاً [جـ: ح]= ٢ □

تعريف: يسمى الحقل ق منتهياً إذا كان |ق|= م حيث أن م عدد طبيعي.

مبرهنة: إذا كان الحقل ل امتداداً منتهياً للحقل ك وكان ك امتداداً منتهياً للحقل ق فإن ل امتداد منته للحقل ق وأن [ل: ق]= [ل: ك] [ك: ق]

البرهان:

نفرض أن [ك: ق]= ن و [ل: ك)= م

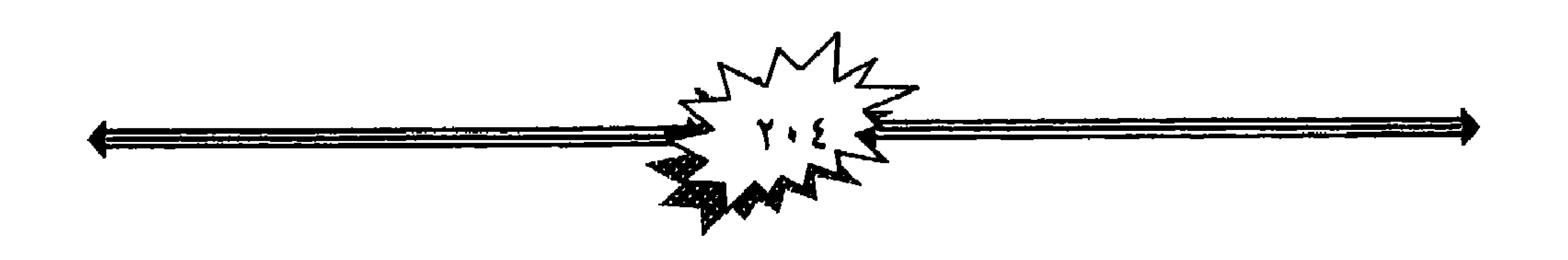
لتكن ع= {ع$_{١}$، ع$_{٢}$، ... ، ع$_{م}$} أساساً لفضاء المتجهات ل على ك ولتكن و= {و$_{١}$، و$_{٢}$، ... ، و$_{ن}$} أساساً لفضاء المتجهات ك على ق.

سنبرهن أن {ع$_{ي}$و$_{ر}$: ع$_{ي}$ ∈ ع، و$_{ر}$ ∈ و} أساس لفضاء المتجهات ل على ق.

حيث أن ي= ١، ٢، ...، م ، ر= ١، ٢، ... ، ن.

ليكن ت عنصراً في ل بما أن ل فضاء متجهات على ك. إذاً ت= جـ$_{١}$ع$_{١}$ + جـ$_{٢}$ع$_{٢}$+...+ جـ$_{م}$ع$_{م}$

حيث أن كلاً من جـ$_{١}$، جـ$_{٢}$، ... ، جـ$_{م}$ عنصر في ك. ولكن ك فضاء متجهات على ق. إذاً جـ$_{ي}$= أ$_{ي١}$و$_{١}$ + أ$_{ي٢}$و$_{٢}$ + ... + أ$_{ين}$و$_{ن}$ = ١، ٢، .. ، م.



حيث أن كلاً من $أ_{ين}$، ....، $أ_{ي٢}$، $أ_{ي١}$ عنصر في ق إذاً

ت= $جـ_{١}ع_{١} + جـ_{٢}ع_{٢} + ... + جـ_{م}ع_{م}$

$= ((أ_{١١}و_{١} + أ_{٢١}و_{٢} + ... + أ_{١ن}و_{ن})\, ع_{١} + (أ_{١٢}و_{١} + أ_{٢٢}و_{٢} + ... + أ_{٢ن}و_{ن})\, ع_{٢} + ... + ... + (أ_{م١}و_{١} + أ_{م٢}و_{٢} + ... + أ_{من}و_{ن})\, ع_{م}$.

وباستخدام قانون التوزيع والتجميع ينتج:

ت= $(أ_{١١}و_{١}ع_{١} + أ_{٢١}و_{٢}ع_{١} + ... + أ_{١ن}و_{ن}ع_{١}) + (أ_{١٢}و_{١}ع_{٢} + أ_{٢٢}و_{٢}ع_{٢} + ... + أ_{٢ن}و_{ن}ع_{ن}) + ... + (أ_{م١}و_{١}ع_{م} + أ_{م٢}و_{٢}ع_{م} + ... + أ_{من}و_{ن}ع_{م})$.

حيث أن $أ_{ير}$ ينتمي إلى ق لكل ي= ١، ٢، ... ، م ولكل ر= ١، ٢، .. ، ن

هذا يعني أن عناصر المجموعة $\{و_{ي}ع_{ر} : ع_{ي} \in ع،\ و_{ر} \in و\}$ تولد عناصر ل على ق.

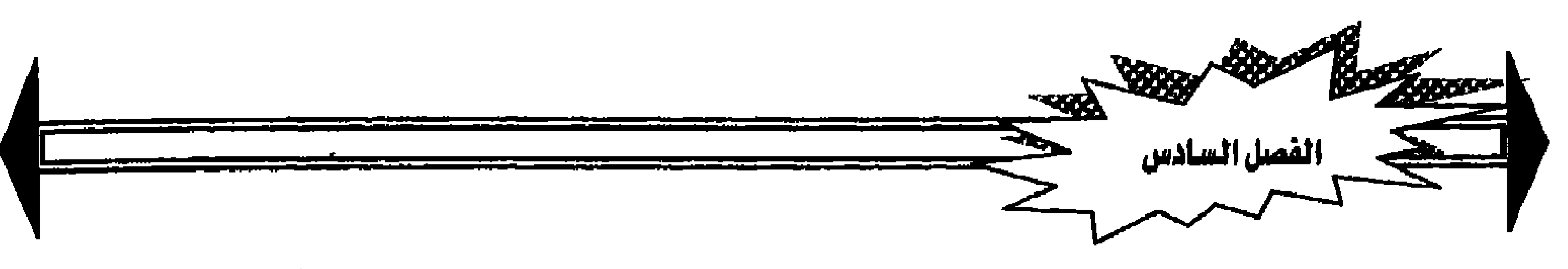
بقي أن نبرهن بأن عناصر هذه المجموعة مستقلة خطياً (linearly independent) على ق.

ليكن $أ_{١١}و_{١}ع_{١} + أ_{٢١}و_{٢}ع_{١} + ... + أ_{١ن}و_{ن}ع_{١} + ... + أ_{ير}و_{ر}ع_{ي} + ... + أ_{من}و_{ن}ع_{م} = ٠$.

فإن:

$(أ_{١١}و_{١} + أ_{٢١}و_{٢} + ... + أ_{١ن}و_{ن})\, ع_{١} + (أ_{١٢}و_{١} + أ_{٢٢}و_{٢} + ... + أ_{٢ن}و_{ن})\, ع_{٢} + ... + (أ_{م١}و_{١} + أ_{م٢}و_{٢} + ... + أ_{من}و_{ن})\, ع_{م} = ٠$.

بما أن:



($أ_{ي١}و_١$ + $أ_{ي٢}و_٢$ +... + $أ_{ين}و_ن$) ∋ ك. لكون $و_ر$ عنصراً في ك وكذلك $أ_{ير}$ 3 ق ⊃ ك.

لكل ي= ١، ٢، ... ، م ولكل ر= ١، ٢، ... ، ن

وبما أن عناصر المجموعة ع مستقلة خطياً على ك لأن ع أساس فضاء المتجهات على ك.

إذا $أ_{ي١}$ $و_١$+ $أ_{ي٢}و_٢$+...... + $أ_{ين}و_ن$=٠ لكل ي=١، ٢ ،......،م

وبما أن و أساس فضاء المتجهات ك على ق وإن $أ_{ير}$ عنصر في ق لكل ي= ١، ٢، ... ، م

ولكل ر= ١،٢،.. ،ن إذاً $أ_{ي١}$= $أ_{ي٢}$=... = $أ_{ين}$= ٠ لكل ي= ٢،١،... ، م

وهذا يعني أن $أ_{ير}$= ٠ لكل ي= ١، ٢، ... ، م ولكل ر= ١، ٢، ... ، ن

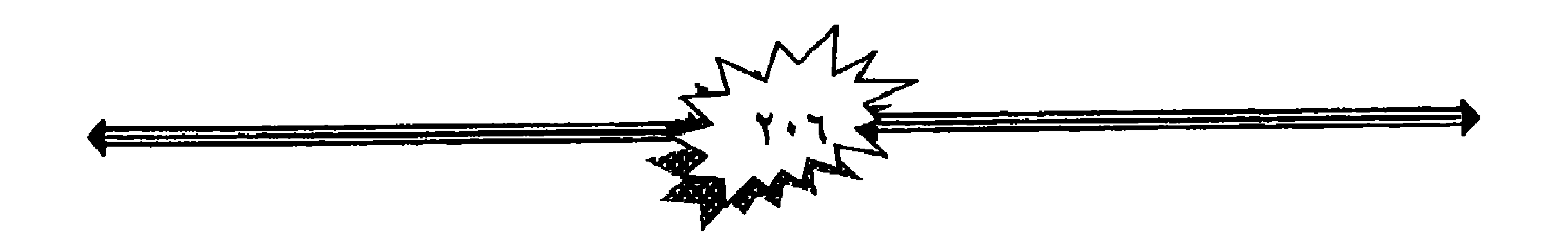
وبالتالي فإن {$و_ي ع_ي$: $ع_ي$، $و_ر$ 3 و} أساس لفضاء المتجهات ل على ق.

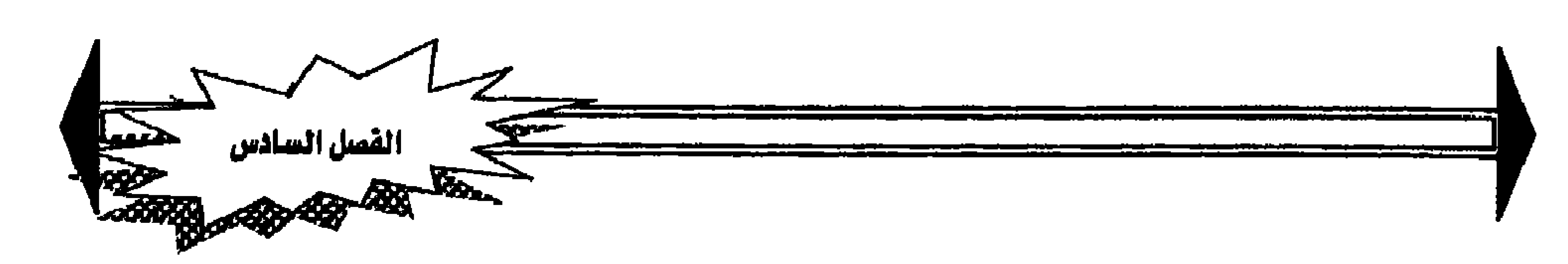
وبما أن |{$و_ي ع_ر$: $ع_ر$ 3 ع، $و_ي$ 3 و}|= م ن

فإن [ل: ك] = م ن = [ل: ك] [ك: ق]

نتيجة: إذا كان الحقل ل امتداداً منتهياً للحقل ق وكان ك حقلاً جزئياً في ل ويحتوي ق فإن [ك:ق]/ [ل:ق].

من هذا يتضح أنه إذا كان العدد ن عدداً أولياً وكان كل من ل، ق حقلاً بحيث [ل: ق]= ن فلا يوجد، أي حقل ك بحيث أن ل← ⊋ك← ⊋ق





سوف نعود إلى الحديث عن هذا الموضوع في البند الرابع من هذا الفصل.

ليكن الحقل ك امتداداً للحقل ق. وليكن أ عنصراً في ك ولتكن م مجموعة كل الحقول الجزئية في ك والتي يحوي كل منها ق و أ في الوقت عينه. إن المجموعة م ليست خالية إذ أن ك عنصر فيها.

مبرهنة تمهيدية: تقاطع الحقول الجزئية في ك والتي تنتمي إلى م، يكون حقلاً. هذا الحقل يحتوي كلاً من ق و أ ويرمز له بالرمز ق(أ).

البرهان:

سهل ويترك كتمرين للطالب □.

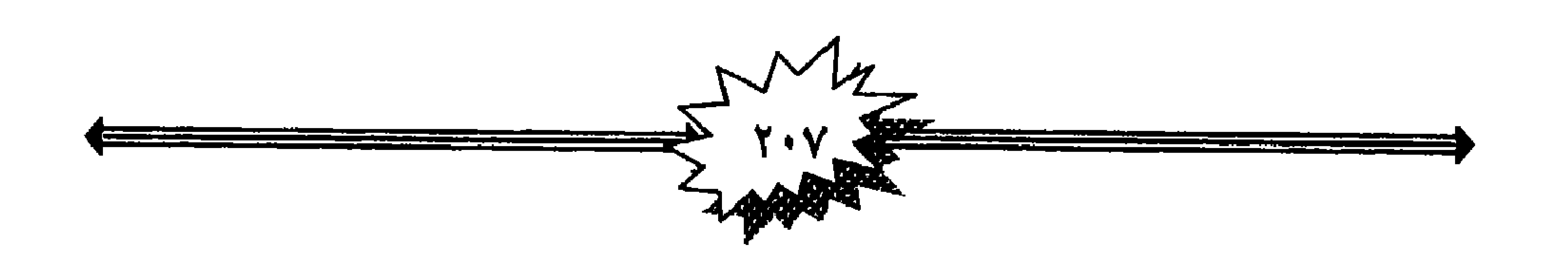
واضح أن أي حقل جزئي في ك ينتمي إلى م يحتوي ق(أ). أي أن (أ) هو أصغر حقل يحتوي كلاً من أ و ق. الحقل ق(أ) يسمى الحقل الناتج من ضم العنصر أ إلى الحقل ق.

مثال (١١): بين أن الحقل ن($\sqrt{2}$) يساوي الحقل ق= {أ + ب $\sqrt{2}$: أ، ب $\in$ ن}

الحل:

إن الحقل ن($\sqrt{2}$) يحتوي جميع الأعداد النسبية إضافة إلى $\sqrt{2}$ لذا فإن ن($\sqrt{2}$) يجب أن يحتوي على جميع الأعداد الحقيقية من النمط ب$\sqrt{2}$ حيث أن ب عدد نسبي وهذا يعني أن ن($\sqrt{2}$) يحتوي جميع الأعداد الحقيقية من النمط أ+ب $\sqrt{2}$ حيث أن كلاً من أ و ب عدد نسبي.

إذاً ق$\leq$ ن($\sqrt{2}$)





ولكن ن$(\sqrt{2})$ هو أصغر حقل يحتوي كلاً من $\sqrt{2}$، ن إذاً ن$(\sqrt{2}) \geq$ ق

وهذا يؤدي إلى أن ن$(\sqrt{2})$= ق

مثال (١٢): الحقل الناتج من ضم العنصر ي=$\sqrt{-1}$ إلى حقل الأعداد الحقيقية ح هو حقل الأعداد العقدية.

الحل:

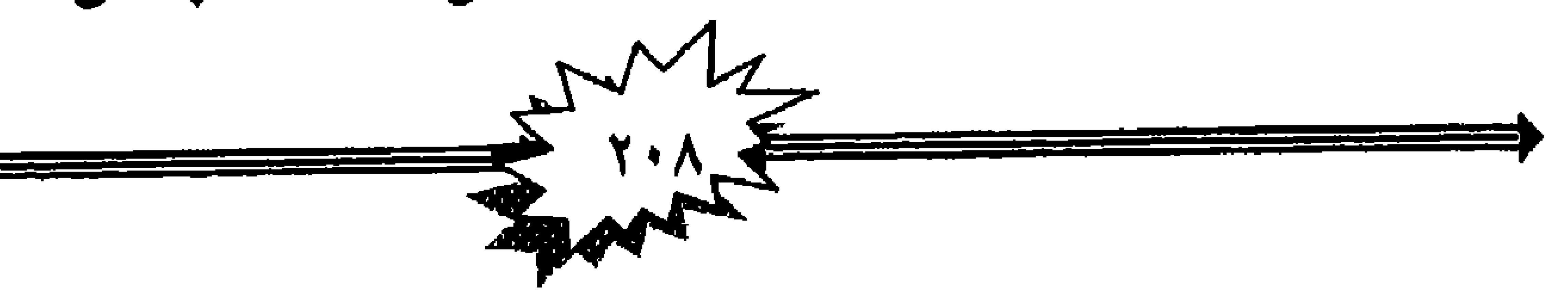
ليكن جـ هو حقل الأعداد العقدية. فإن ح(ي) يحتوي جميع عناصر (ر) إضافة إلى العنصر (ي)، لذا فإن ح(ي) يحتوي جميع العناصر من النمط ب ي حيث أن ب عدد حقيقي.

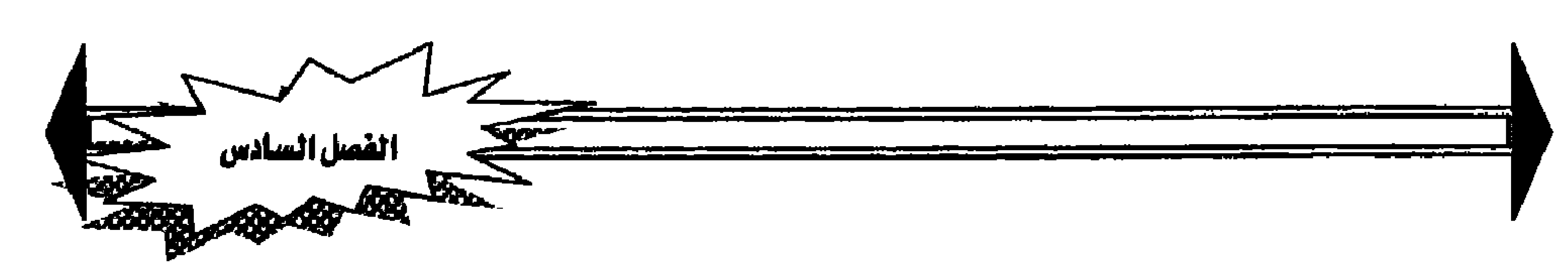
إذا ح(ي) يحتوي جميع العناصر من النمط أ + ي ب حيث أن كلاً من أ، ب عدد حقيقي. إذا جـ $\subset$ ح(ي) ولكن ح(ي) هو أصغر حقل يحتوي ح و(ي)، أي ح(ي) $\subset$ جـ إذاً ح(ي)= جـ

تعريف: ليكن الحقل ك امتداداً للحقل ق. يسمى العنصر أ في ك جبرياً على ق إذا وجدت عناصر جـ٠، جـ١، جـ٢، ... جـن ليست جميعها أصفاراً بحيث جـ٠ + جـ١أ + جـ٢أ^{٢} + ق ... جـنأ^{ن} = ٠.

تعريف: ليكن ك امتداداً للحقل ق. فإذا كان متعدد الحدود ق(س) عنصراً في ق[س]، حيث أن ق(س) = جـ٠ + جـ١أ +... جـنأ^{ن} فإن ق(ب) (لأي عنصر ب في ك) يعني جـ٠ + جـ١ب + جـ٢ب^{٢} + ق ... جـنب^{ن} وهذا عنصر في ك ينتج من تعويض ب بدلاً من س في متعدد الحدود ق(س). نقول عن عنصر ب بأنه يحقق ق(س) إذا كان ق(ب)= ٠. تدرج فيما يأتي بعض الحقائق بدون برهان.

مبرهنة: إذا كان (س) عنصراً جبرياً على الحقل ق وكان ب(س) متعدد حدود





غير صفري وغير قابل للاختزال على ق. وكانت درجة ب(س) تساوي ن. وكان ب(α)= ٠ فإن ق(α)$\simeq$ق[س]/ [ب(س)] كما أن عناصر ق(α) تكون كما يأتي ق(α)= { جـ٠، جـ١α +... جـن-١جـ$^{ن-١}$: جـي $\in$ ق}

مبرهنة: لتكن ق حقلاً. وليكن ق(س) متعدد حدود درجته ن على ق[س]، حيث أن ن≤١. وليكن ق(س) غير قابل للاختزال على ق. فيوجد امتداد و للحقل ق بحيث [و: ق]= ن وأن و يحتوي جذراً لمتعدد الحدود ق(س) □.

ويمكن صياغة هذه المبرهنة بالشكل:

مبرهنة: إذا كانت ق(س) متعدد حدود ذا درجة ن غير قابل للاختزال على الحقل ق وكانت ب(α)= ٠ فإن [ق(α): ق]= ن □.

مبرهنة: إذا كانت ق(س) عنصراً في ق[س]، فيوجد امتداد منته وللحقل ق بحيث أن و يحتوي جذراً لمتعدد الحدود ق(س) وأن [و: ق] ≥ درجة ق(س) □.

مبرهنة: لتكن ق(س) متعدد حدود غير قابل للاختزال على الحقل ق. فيوجد ك، ك امتداد للحقل ق بحيث يكون متعدد الحدود ق(س) قابلاً للاختزال على ك إلى عوامل خطية (أي متعددات حدود درجتها تساوي ١). □

مبرهنة: ليكن متعدد الحدود ق(س) عنصراً في ق[س] درجته ن لا تقل عن ١ (أي ن ≤ ١) فيوجد امتداد و للحقل ق بحيث أن [و: ق] ≥ ن! وأن عدد جذور ق(س) على و يساوي ن.





البرهان:

لا يخفى أنه إذا تكرر جذر عدداً من المرات وليكن م فإننا نعده وكأنه م من الجذور./ من مبرهنة سابقة يوجد امتداد و. للحقل ق وأن [و.: ق] ≤ ن.

بحيث أن ق(س) له جذر α في و.. لذا ففي و.[س]، يتحلل ق(س) بالشكل الآتي

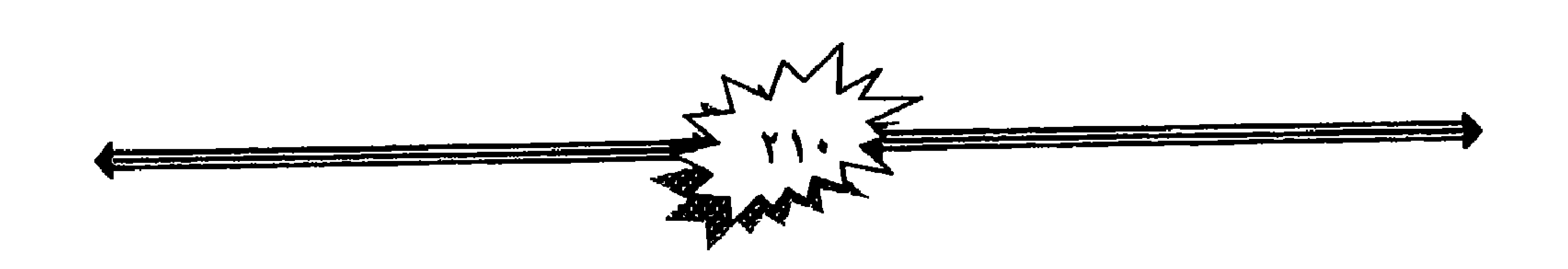
ق(س)= (س- ﻡ) ك(س)

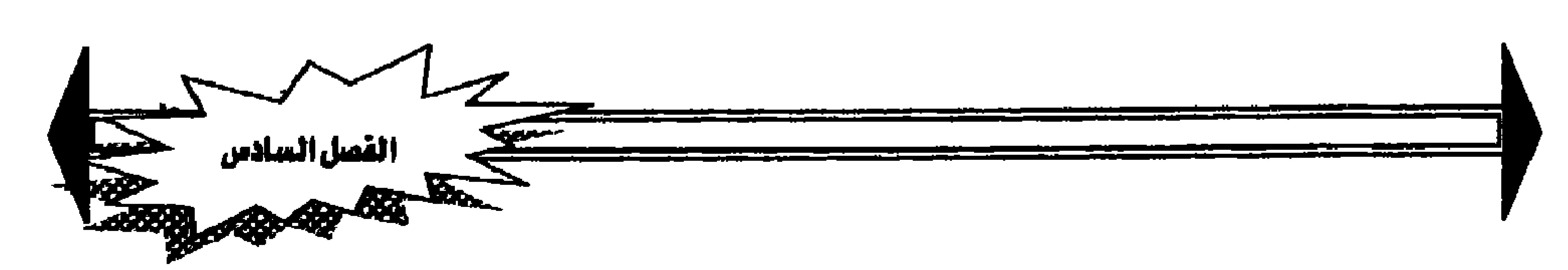
حيث أن ك(س) متعدد حدود درجته (ن-١). وبالاستقراء أو بالاستمرار بنفس الأسلوب أعلاه نستطيع أن نبين وجود امتداد و للحقل و. ودرجته هذا الامتداد لا تزيد على (ن-١)! بحيث يكون لمتعدد الحدود ك(س)، (ن-١) من الجذور في الحقل و. بما أن أي جذر لمتعدد الحدود ق(س) اما أن يكون ﻡ أو يكون جذراً لمتعدد الحدود ك(س). فإننا نكون قد حصلنا على جميع الجذور الممكنة لمتعدد الحدود ق(س) في الحقل و. وبما أن:

[و: ق]= [و: و.] [و.: ق] ≤ ن(ن-١)!= ن! □.

تعريف: إذا كان متعدد الحدود ق(س) عنصراً في ق[س]، وإذا كان الحقل و امتداداً للحقل ق. فإن و يسمى حقل انغلاق (Splitting Field) لمتعدد الحدود ق(س) على الحقل ق. إذا أمكن تحليل ق(س) إلى حاصل ضرب عوامل خطية على الحقل و ولكن ليس على أي حقل جزئي فعلي في و.

مما تقدم نستطيع أن نقول أن العنصر ﻡ في ك جبري على ق إذا وجد متعدد حدود لا صفري ب(س) في ق[س] بحيث ب(ﻡ)= ٠.





مبرهنة: العنصر α جبري على ق إذا وفقط إذا كان ق(α) امتداداً منتهياً للحقل ق.

البرهان:

نفرض أن ق(α) امتداد منته للحقل ق وأن [ق(α): ق]= م العناصر ١، α، α^2، ... ، $\alpha^م$ معتمدة خطياً (linearly dependent) على الحقل ق، لكون عددها م+١، أكبر من درجة فضاء المتجهات ق(α) على ق. إذاً توجد عناصر جـ٠، جـ١، جـ٢، ... ، جـم في ق، ليست جميعها أصفاراً بحيث أن:

$$جـ_٠ . ١ + جـ_١ \alpha + جـ_٢ \alpha^٢ ..... + جـ_م \alpha^م = ٠$$

لذا فإن العنصر α جبري على ق لأنه يحقق متعدد الحدود.

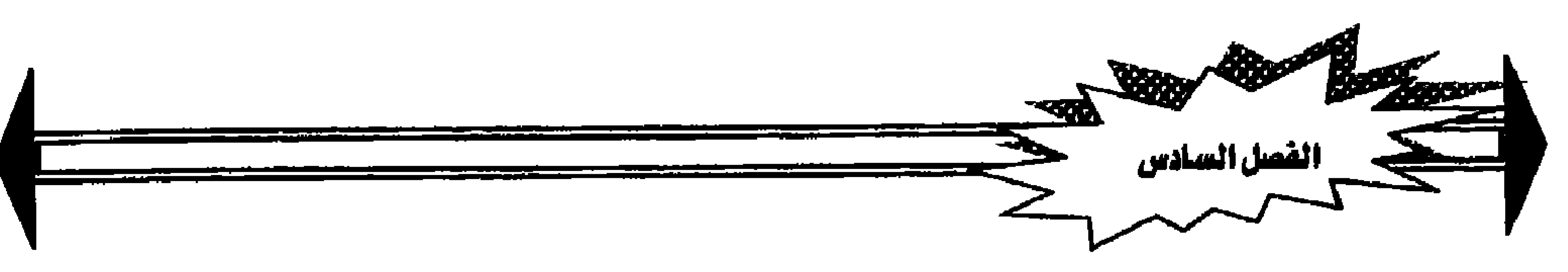
ب(س)= $جـ_٠ + جـ_١ س + جـ_٢ س^٢ + ... + جـ_م س^م$ الذي ينتمي إلى ق(س) الآن نفرض أن العنصر $\alpha \in$ ك جبري على ق. فإن α يحقق متعدد حدود لا صفري في ق[س].

ليكن ب(س) متعدد حدود في ق(س) وليكن ب(س) ذو أصغر درجة بحيث أن ب(α)= ٠ سنبرهن أولاً أن ب(س) غير قابل للاختزال على ق.

إذا كان ب(س)= ق(س) هـ(س) حيث أن كلاً من ق(س) و هـ(س) عنصر في ق[س] فإن ب(α)= ق(α) هـ(α)= ٠ ⟵ (ق(α)= ٠) ل(هـ(α)=٠)

هذا يعني وجود متعدد حدود في ق[س] درجته أصغر من درجة ب(س) بحيث ب(α)= ٠





وهذا يخالف فرضنا أن ب (س) ذو أصغر درجة ممكنة بحيث أن ب(أ)= ٠
إذاً ب(س) غير قابل للاختزال على ق.

نعرف الآن دالة ق من ق[س] إلى ق(أ) كما يلي: ق(هـ(س)) = هـ (أ)
لكل متعددات الحدود ق[س) في هـ(س)

سنترك للطالب أن يتحقق من كون ق تشاكل حلقي من ق[س] إلى ق(أ) وأن

ق[س]/ ل ≃ ق(أ)　　　　حيث أن ل= درجة ق

ولكن ل= (ب(س)) المثالي اولد بمتعدد الحدود ب(س)

إذا عدد أبعاد ق[س]/ ل كفضاء متجهات على ق يساوي درجة ب(س).
أي أن [ق(أ): ق]= درجة ب(س)

وهذا يعني أن ق(أ) امتداد للحقل ق. □

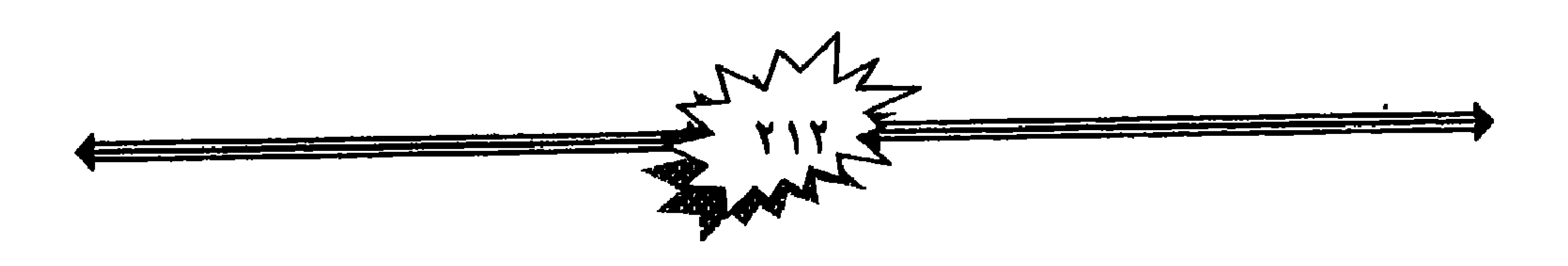
تعريف: ليكن ك امتداداً للحقل ق. وليكن م عنصراً في ك. نقول أن أ جبري على ق وذو درجة ن إذا حقق متعدد حدود لا صفري على ق من الدرجة ن ولم يحقق أي متعدد حدود لا صفري على ق ذا درجة أقل من ن.

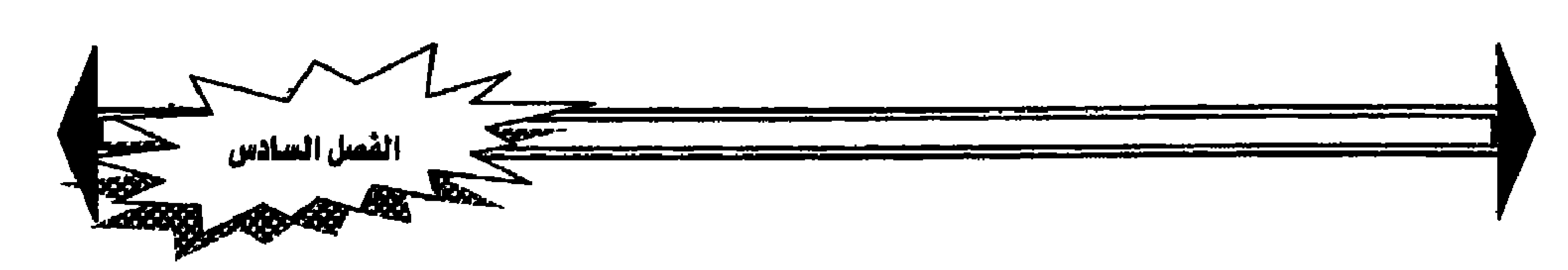
نتيجة: إذا كان العنصر أ في ك جبرياً على ق ذا درجة ن فإن[ق(أ): ق]= ن□.

مبرهنة: ليكن الحقل ك امتداداً للحقل ق إذا كان كل من ب، أ في ك عنصراً جبرياً على ق فإن العناصر أ ± ب، أ.ب ، $\frac{أ}{ب}$

جميعها جبرية على ق. حيث ب لا يساوي صفراً.

بعبارة أخرى فإن العناصر الجبرية على ق في ك تكون حقلاً جزئياً في ك.





البرهان:

نفرض أن العنصر ﺃ في ك جبري على ق ذو درجة م والعنصر ب في ك جبري على ق ذو درجة ن. باستخدام النتيجة أعلاه نستنسخ أن الحقل الجزئي ق(ﺃ)= ت في ك ذو درجة م على ق.

بما أن العنصر ب في ك جبري على ق ذو درجة ن. إذاً العنصر ب في ك جبري على ق(ﺃ)= ت ذو درجة ن، في الأكثر، لكون ق(ﺃ)= ت يحتوي ق.

إذاً الحقل الجزئي. ي= ت(ب) في ك جبري على ت وذو درجة ن، وفي الأكثر، ولكن

[ي: ق]= [ي: ت] [ت: ق] إذاً [ي: ق] $\geq$ م ن

وهذا يعني أن ي امتداد منته للحقل ق.

من الواضح أن العنصرين ﺃ، ب ينتميان إلى ي لذا فالعناصر ﺃ ± ب، ﺃب، $\frac{ﺃ}{ب}$

جميعها تنتمي إلى ي.

بما أن [ي: ق] عدد منته. فإن العناصر ﺃ ± ب، ﺃب، $\frac{ﺃ}{ب}$ جميعها جبرية على ق □.

ونستنتج من البرهان أن كل عنصر في ي يحقق متعدد حدود من درجة م ن في الأكثر، على ق لكون [ي:ق] $\geq$ م ن.

نتيجة: إذا كان العنصر ﺃ في ك جبرياً على ق وذا درجة م والعنصر ب في ك جبرياً على ق وذا درجة ن فإن العناصر ﺃ ± ب، ﺃب، $\frac{ﺃ}{ب}$



جميعها جبرية على ق وذات درجة م ن، في الأكثر، حيث أن ب لا يساوي صفراً.

تعريف: الامتداد ك للحقل ق يسمى امتداداً جبرياً للحقل ق إذا كان كل عنصر في ك، عنصراً جبرياً على ق.

تعريف: العدد العقدي يسمى عدداً جبرياً إذا كان جبرياً على حقل الأعداد النسبية.

تعريف: العدد العقدي يسمى عدداً لا جبرياً (trans condental) إذا لم يكن جبرياً.

تمارين:

ليكن ن حقل الأعداد النسبية و ح حقل الأعداد الحقيقية و ع حقل الأعداد العقدية.

١- برهن أن العنصرين $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ في ح جبريان على ن، ثم أعط متعدد حدود ذا درجة ٤ على ن يتحقق بالعنصر $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

٢- ما درجة $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ على ن؟

٣- بين أن العنصر $\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}$ جبري على ن وذو درجة ٦.

٤- برهن أن مجموعة الأعداد الجبرية على ن، في الحقل ع تكون حقلاً جزئياً في ع.

٥- احسب [ن: ع].

الحقول المنتهية (حقول غالوا Galois Fields)

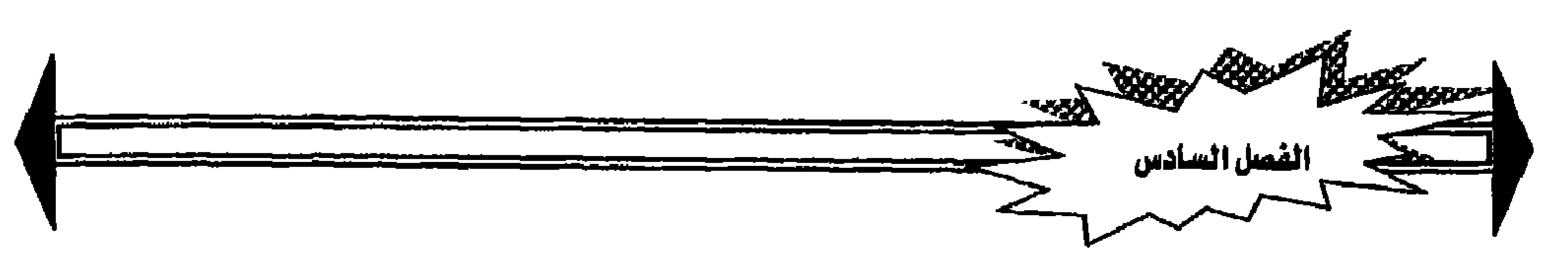
سندرس في هذا البند صنفاً مهماً من الحقول وهو صنف الحقول المنتهية وتسمى أيضاً حقول غالوا إكراماً للرياضي الفرنسي إيفرست غالوا (١٨٣٢-١٨١١).

تستخدم حقول غالوا في مواضع عديدة، فهي مثلاً تستخدم في إنشاء المربعات اللاتينية المتعامدة (orthogonal altin squares) وفي نظرية التجهيز (coding theory) إضافة إلى استخداماتها في أماكنها الطبيعية في نظرية غالوا (Galois Theory) وفي مواضيع الجبر بشكل عام.

يسمى الحقل ق منتهياً إذا كان |ق| عدداً طبيعياً. والحقول المنتهية موجودة فمثلاً $ط_ن$ حقل حيث ن عدد أولي. ومبرهنة سابقة تبين عدداً لا نهائياً من الحقول المنتهية. في هذا البند ستحدد أشكال الحقول المنتهية ونتعرف على بعض خواصها.

مبرهنة تمهيدية: لتكن ق حقلاً يحتوي على ر من العناصر ولتكن ق حقلاً جزئياً في ك حيث إن ك حقل منته. فإن ك يحتوي على $ر^ن$ من العناصر حيث أن ن درجة ق في ك أي [ك: ق]= ن.

البرهان: بما أن ق حقل جزئي في ك، فإن ك فضاء متجهات على الحقل ك وما دام ك منتهياً فإن عدد أبعاده على ق (كفضاء متجهات) منته. ليكن [ك: ق]= ن فيوجد أساس ذو ن من العناصر لفضاء المتجهات ك على الحقل ق. ليكن {$ل_١$، $ل_٢$، $ل_٣$، ...، $ل_ن$} أساساً لفضاء المتجهات ك على الحقل ق. فإن كل عنصر في ك يتمثل بشكل وحيد الهيئة.



α_1ل$_1$ + α_2ل$_2$ + ... + ل$_ن\alpha_ن$

حيث أن α_1، α_2، ... ، $\alpha_ن$ عناصر في ق. لذا يكون عدد عناصر ك هو عدد التعابير من النوع α_1ل$_1$ + α_2ل$_2$ + ... + $\alpha_ن$ل$_ن$ حيث أن كلاً من α_1، α_2، ... ، $\alpha_ن$ يمكن أن يكون أي عنصر في ق. أي أن كل من هذه المعاملات يأخذ ر من القيم. لذا يكون ر^م هو عدد عناصر ك □.

نتيجة: ليكن ق حقلاً منتهياً، فإن إمكاننا أن نجد عدداً أولياً ن وعدداً طبيعياً م بحيث أن |ق|= ن^م، علماً بأن ن مميز الحقل ق.

البرهان:

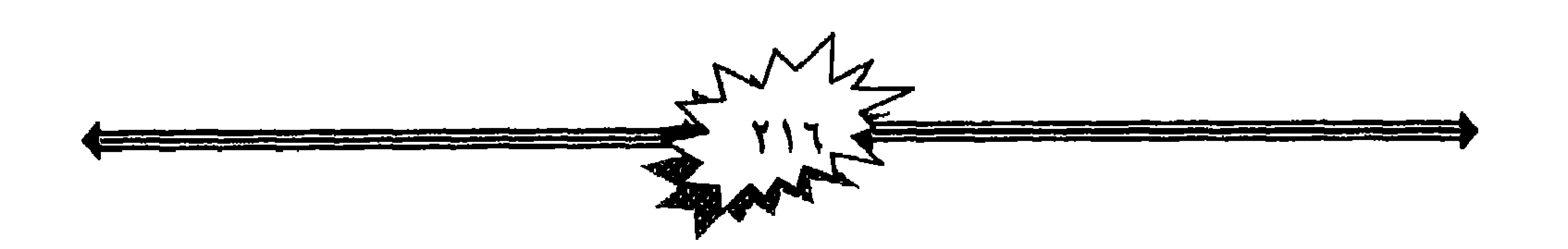
بما أن ق حقل منته وليكن عدد عناصره ر. فإن ر$_1$= ٠ وإن مميز الحقل ق هو عدد أولي ن. لذا فإن ق يحتوي حقلاً جزئياً ق. يتشاكل تقابلياً مع ط$_ن$.

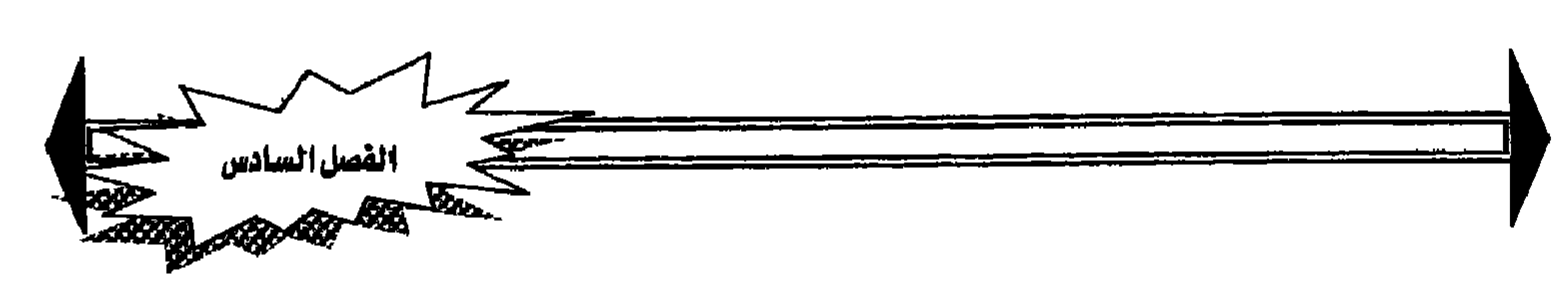
بما أن عدد عناصر ق. هو ن، فإن عدد عناصر ق هو ن^م حيث أن م= [ق: ق.] □

نتيجة: ليكن ق حقلاً منتهياً عدد عناصر ن^م. فيكون $أ^{ن^م}$ =أ لكل عنصر أ في ق.

البرهان: إذا كان أ= ٠ فالادعاء صحيح بدون حاجة إلى برهان. أما العناصر غير الصفرية وعددها ن^م-١ فإنها تشكل زمرة مع عملية الضرب. |ق| إذا $أ^{ن^م-1}$ =١ لكل العناصر أ حيث أن أ ≠ ٠، وبضرب الطرفين في أ نحصل على $أ^{ن^م}$ =أ □.

تعريف: الحقل المنتهي ق يسمى حقل غالوا إذا كان ن^م= حيث أن ن عدد





أولي و م عدد طبيعي نرمز إلى حقل غالوا بالرمز ع (نم)

بالإمكان مبرهنة على أنه لكل عدد أولي ن ولكل عدد طبيعي م يوجد الحقل غالوا ع (نم). وأن جميع حقول غالوا ذات الرتبة نم متشاكلة تقابلياً.

من نتيجة سابقة ينتج أن ع (نم) هو امتداد من الدرجة م للحقول $ط_ن$. ومن المبرهنة السابقة تعلم أن كل حقل منته ع (نم) يمكن إنشاؤه بإيجاد متعدد حدود ر(س) في $ط_ن$[س] درجته م وغير قابل للاختزال على $ط_ن$.

وبعد ذلك نعرف ع (نم)= $ط_ن$[س]/ ر(س)

وباستخدام المبرهنة التمهيدية السابقة نتوصل إلى أنه يوجد عنصر α في ع (نم) بحيث أن ر(α)= ٠ وأن ع (نم) = $ط_ن(\alpha)$

حيث أن $ط_ن(\alpha)$ هو الحقل الناتج من ضم α إلى الحقل $ط_ن$.

مثال (١٣): أنشئ الحقل ع (٤)

الحل:

بما أن ع (٤)= ع (٢ ^٢^): ع (٢)]= ٢

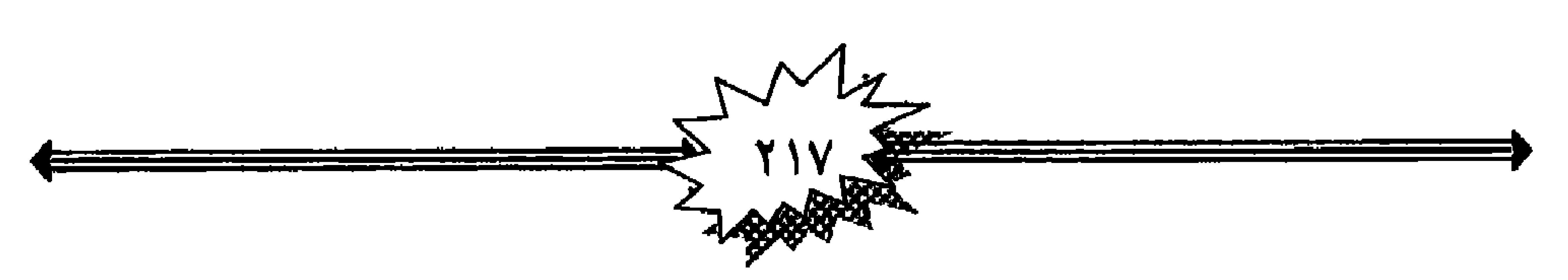
فإننا نستطيع أن نقول أن ع (٤)= $ط_٢$[س]/ (س^٢+س+١)= $ط_٢(\alpha)$

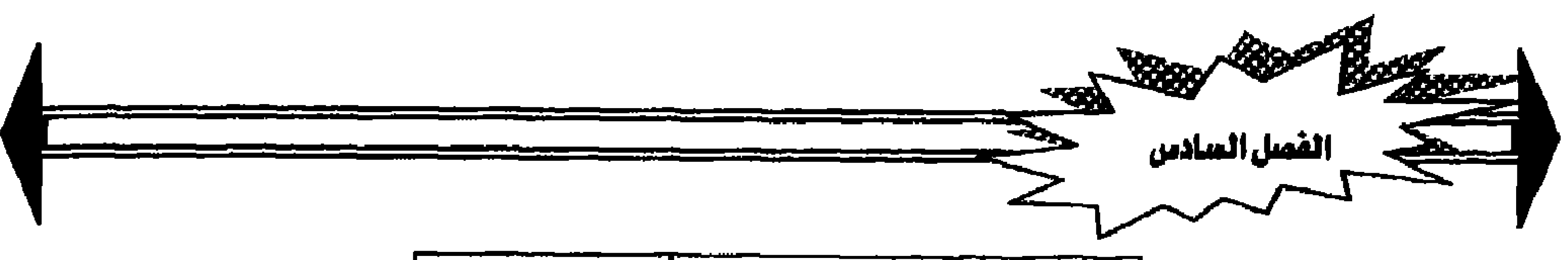
هذا يعني أن

ع (٤)= {أس+ ب: أ، ب $\in$ $ط_٢$} = {أ، α، $\alpha^٢$= α+١، $\alpha^٣$= ١}

لكون $\alpha^٢ + \alpha + ١ = ٠$

إذاً عناصر ع (٤) ستكون





أ	ب	أس+ب	العنصر في ط٢(α)
٠	٠	٠	٠
٠	١	١	١
١	٠	س	α
١	١	س+١	١ + α

(α٢ = α + ١)

وسيكون جدولا الجمع والضرب في ع٢ (٤) على النحو الآتي:

+	٠	١	α	١+α
٠	٠	١	α	١+α
١	١	٠	١+α	α
α	α	١+α	٠	١
١+α	١+α	α	١	٠

	٠	١	α	١+α
٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	α	١+α
α	٠	α	١+α	١
١+α	٠	١+α	١	α

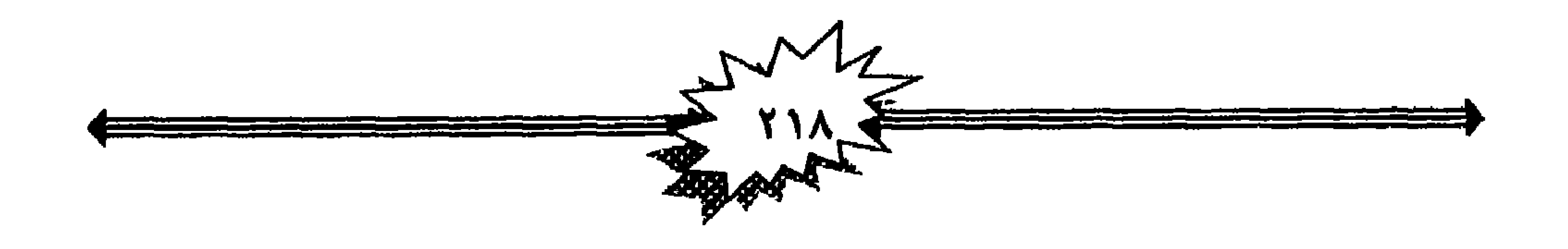
حيث أن α٢ = α+١. □

مثال (١٤): أنشئ الحقل ع٢ (٥٣)

الحل:

[ع٢ (٥٣): ع٢ (٥)]= ٣

فإن علينا أن نجد متعدد حدود من الدرجة ٣ غير قابل للاختزال على ط٥ أن متعدد الحدود ن(س)= س٣ + س + ١



يتصف بالصفات المطلوبة أي أنه من الدرجة الثالثة وهو غير قابل للاختزال على ط٥، لذا ن(س) يصلح لإنشاء الحقل ع` (٥)^{٣}

وكذلك

ع` (٥)^{٣}= ط٥[س]/ (س^{٣}+س+١)= ط٥(أ)

حيث أن أ^{٢} + أ + ١= ٠ □.

وفي الواقع، يوجد متعدد حدود آخر يتصف بالصفات المطلوبة أعلاه وهي أنه من الدرجة الثالثة وغير قابل للاختزال على ط٥ وهو س^{٣} + س + ١ لذلك فإن

ع` (٥)^{٣}= (ط٥[س]/ (س^{٣}+س+١)) ≃ (ط٥[س]/ (س^{٣}+س^{٢}+١))

إذا كان ر(س) عنصراً في طق(س) غير قابل للاختزال على طق وكانت درجته م وكان أ جذراً لمتعدد الحدود ر(س). فإن عناصر ع` (ن^{م}) هي:

{أ. + أ١α + أ٢$\alpha^{٢}$ + ... + أن-١ $\alpha^{ك-١}$: أي ∈ طن}

عملية الجمع على عناصر ع` (ن^{م}) هي عملية جمع متعددات الحدود ولكن عملية الضرب معقدة قليلاً إذ أنها يجب أن تتم مع ملاحظة أن ر(أ)= ٠.

على أية حال، فإن عناصر ع` (ن^{م}) جميعها باستثناء الصفر يمكن أن تولد من الجذر ن أي أن

ع` (ن^{م})= {٠، α، $\alpha^{٢}$، ....، $\alpha^{ن^{م}-١}$، $\alpha^{ن^{م}-١}$ = ١}

وهذا ما تنص عليه المبرهنة الآتية:

مبرهنة: إذا كانت ع ٓ (ن٢) تمثل مجموعة عناصر ع ٓ (ن٢) التي لا تساوي صفراً فإن ع ٓ* (ن٢) زمرة دائرية.

البرهان: يعتمد البرهان على كون ع ٓ* (ن٢) زمرة آبلية.

تعريف: العنصر المولد للزمرة المولدة ع ٓ* (ن٢) يسمى عنصراً بدائياً (Primitive Element) في ع ٓ (ن٢).

أي أن α عنصر بدائي في ع ٓ (ن٢) إذا كان

ع ٓ* (ن٢) = $<\alpha>$

فمثلاً في ع ٓ (٤)، تكون الزمرة الضربيبة للعناصر غير الصفرية ع ٓ* (٤)، زمرة دائرية رتبتها ٣ تتولد من أي من العنصرين α و α + ١ اللذين يختلفان عن ١. إذاً كل من العنصرين α و α + ١ عنصر بدائي.

مثال (١٥): جد جميع العناصر البدائية في ط٣(α)= ع ٓ (ر) حيث أن ﺃ٢+ ١= ٠

الحل:

ع ٓ (ر)= ط٣[س]/ (س٢ + ١)= {ﺃ + ب س: ﺃ، ب∈ط٣}

إن العناصر غير الصفرية في ع ٓ (ر) تشكل زمرة دائرية رتبتها ٨ لذا فإن رتبة أي عنصر تكون ٨ أو ٤، ٢، ١.

لحساب قوى كل عنصر من العناصر، نستخدم العلاقة ﺃ٢= -١ = ٢

من الجدول التالي نجد أن كل من ٢ + ٢α، ١ + ٢α، ٢ + α، ١ + α عنصر بدائي في ع ٓ (ر) وهذه هي كل العناصر البدائية.

هل العنصر بدائي	الرتبة	$س^{8}$	$س^{4}$	$س^{2}$	العنصر س
لا	١	١	١	١	١
لا	٢	١	١	١	٢
لا	٤	١	١	٢	α
نعم	٨	١	٢	α٢	α + ١
نعم	٨	١	٢	α	α + ٢
لا	٤	١	١	٢	α٢
نعم	٨	١	٢	α	α٢ + ١
نعم	٨	١	٢	$\alpha^{٢}$	α٢ + ٢

تمارين

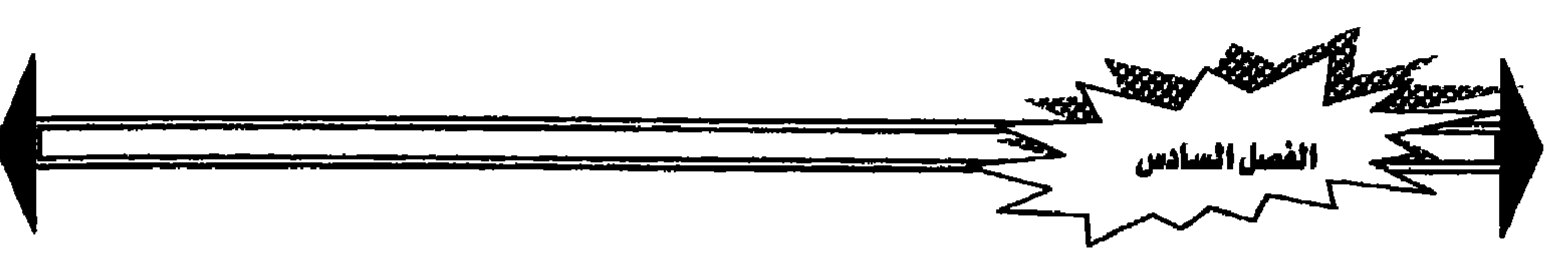
١- برهن أن $ع^{*}$ (٨) هو حقل انغلاق لمتعدد الحدود $س^{8}$+ س في $ط_{2}$[س]

٢- ليكن $ط_{2}(\alpha)$= $ع^{*}$ (١٦) حيث أن $\alpha^{4} + \alpha + 1 = 0$، جد متعدد حدود غير قابل للاختزال على طه على أن يكون α^{3} جذراً له.

٣- إذا كان العنصر α جذراً لمتعدد الحدود $س^{3}$ + س + ١ وكان العنصر β جذراً لمتعدد الحدود $س^{3}$ + س + ١ على الحقل $ط_{2}$، برهن أن الحقلين $ط_{2}$ (α) و$ط_{2}$(β) متشاكلان تقابلياً.

الأعداد ممكنة الإنشاء (Constructable Numbers)

سنذكر في هذا البند اهتمامنا على الأطوال التي يمكن الحصول عليها من طول معطى (نستطيع أن نأخذه من وحدة للقياس، باستخدام حافة مستقيمة وفرجال. قد نستعمل أحياناً كلمة (مسطرة)، بدلاً من "حافة مستقيمة" والمقصود



بالحافة المستقيمة مسطرة غير مدرجة تستعمل لرسم قطع مستقيمات لا تستعمل في القياس ونؤكد هنا أننا عند استعمالنا كلمة "مسطرة" نقصد حالة مستقيمة وأننا كلما استعملنا كلمة "إنشاء" أو مشتقاتها مثل "ممكن الإنشاء"، "أنشئ"، ... فإننا نقصد دائماً الإنشاء باستخدام حافة ومستقيمة وفرجال حتى وإن لم نذكر ذلك صراحة.

لتكن ن مجموعة من النقط في مستوٍ، ولاستبعاد الحالات التافهة نفرض أن ن تحتوي نقطتين في الأقل. سنحاول أن نميز كل النقط التي يمكن الحصول عليها باستعمال مسطرة وفرجال —من نقط المجموعة ن، بعدد منته من الخطوات.

نعتبر أن جميع نقط ن ممكنة الإنشاء نفرض ن مجموعة عناصرها نقط ممكنة الإنشاء وتحتوي ن، نستعرض الآن عمليات الإنشاء المسموح بها والتي تستطيع أن نجريها عدداً منتهياً من المرات لتوسيع المجموعة ن وهذه العمليات هي:

أ) رسم قطعة مستقيم بين نقطتين في ن.

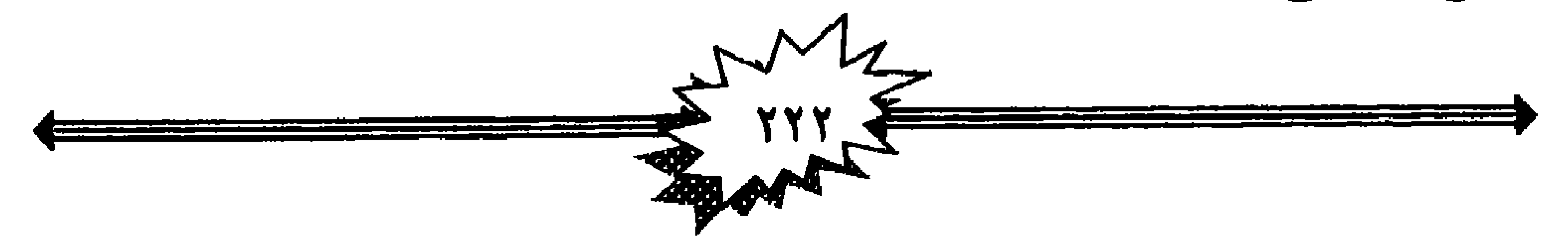
ب) رسم دائرة مركزها نقطة في ن وقياس نصف قطرها، هو البعد بين نقطتين في ب.

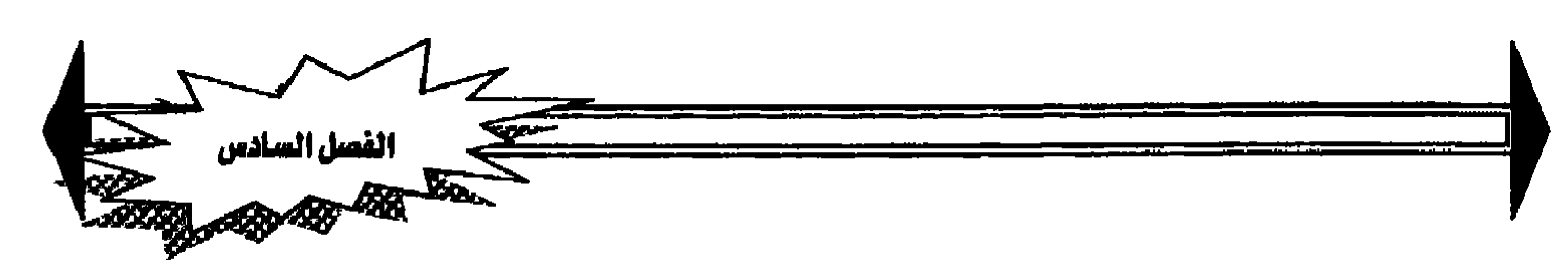
جـ) تعيين نقطة تقاطع مستقيمين.

د) تعيين نقط تقاطع مستقيم ودائرة.

هـ) تعيين نقط تقاطع دائرتين.

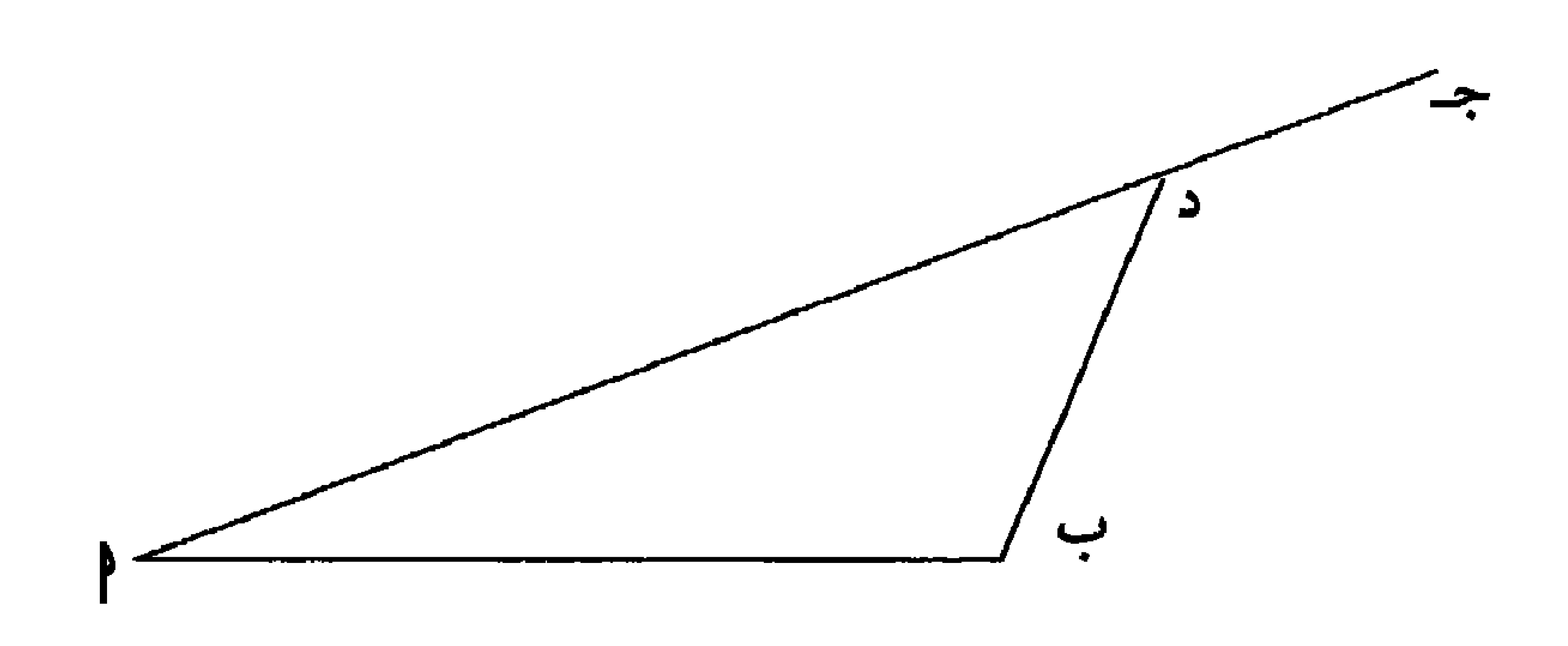
سنجد أننا نستطيع أن نقسم طولاً معيناً إلى أي عدد من الأجزاء المتساوية بالقياس وهذا يعني أننا نستطيع إنشاء أي مضاعف نسبي لطول معلوم. وفي الواقع نستطيع أن نعمل أكثر من ذلك.





فمثلاً نستطيع أن ننشئ بعض المضاعفات غير النسبية مثل $\sqrt{2}$.

ونحتاج هنا أن نتذكر بعض المهارات البسيطة من هندسة المرحلة المتوسطة مثل رسم عمود على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي إليه ورسم مواد لمستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي إليه. وتقسيم قطعة مستقيم إلى م من الأجزاء المتساوية بالقياس كما يلي:

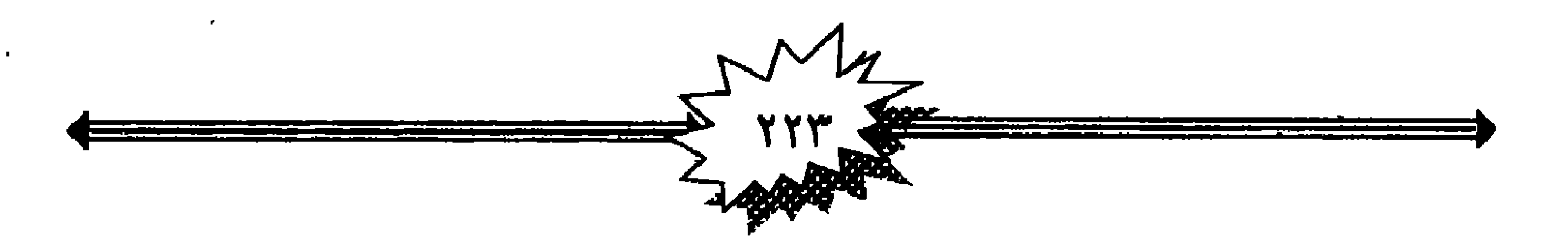


نفرض أن القطعة المراد تقسيمها هي اب.

نرسم من إحدى نهايتيها – ولتكن ا – مستقيماً مثل اجـ وباستخدام الفرجال، نقسم اجـ مبتدئين من ا إلى العدد المطلوب من الأجزاء.

نصل آخر نقطة من نقط التقسيم على اجـ ولتكن د بالنقطة ب، ثم نرسم من كل نقطة من نقط التقسيم موازياً للقطعة دب فنحصل على التقسيم المطلوب للقطعة اب.

وللحصول على قطعة مستقيم طولها ر$\sqrt{2}$ من قطعة طولها ر، نرسم مثلاً قائم الزاوية طول كل طلعيه القائمين ر، فيكون طول الوتر ر$\sqrt{2}$.



ابتداءً نعرف المقصود بالنقطة ممكنة الإنشاء (Constractable Point)

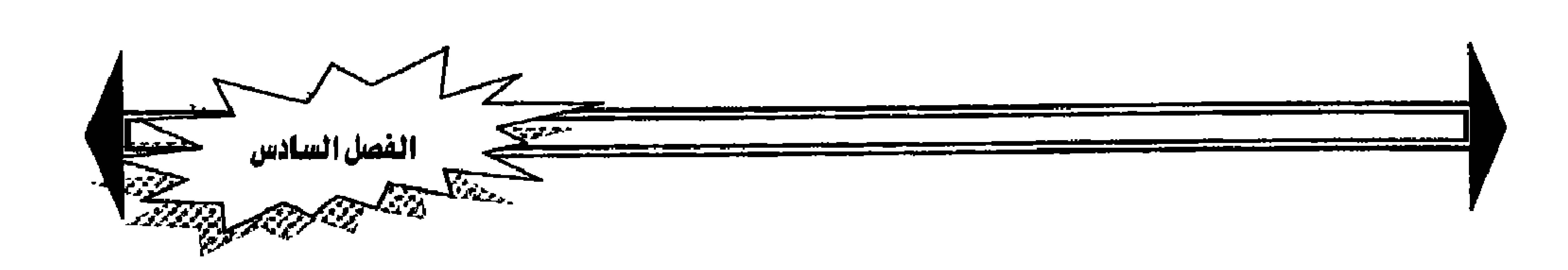
تعريف: إذا أعطينا قطعة مستقيم في المستوى، نختار محاور متعامدة بحيث تكون نهايات القطعة المعلومة في النقطتين (٠، ٠) و (٠، ١)، أن أية نقطة في المستوى يمكن الوصول إليها من هذه القطعة باستخدام المسطرة والفرجال تدعى نقطة ممكنة الإنشاء. نسمي عدداً حقيقياً بأنه عدد ممكن الإنشاء (Constractable Number) إذا كان مسقطاً (إحداثياً) لنقطة ممكنة الإنشاء. وهذا الوصف للعدد وممكن الإنشاء يكافئ القول بأن العدد الحقيقي ممكن الإنشاء إذا كان طولاً لقطعة مستقيم ممكنة الإنشاء.

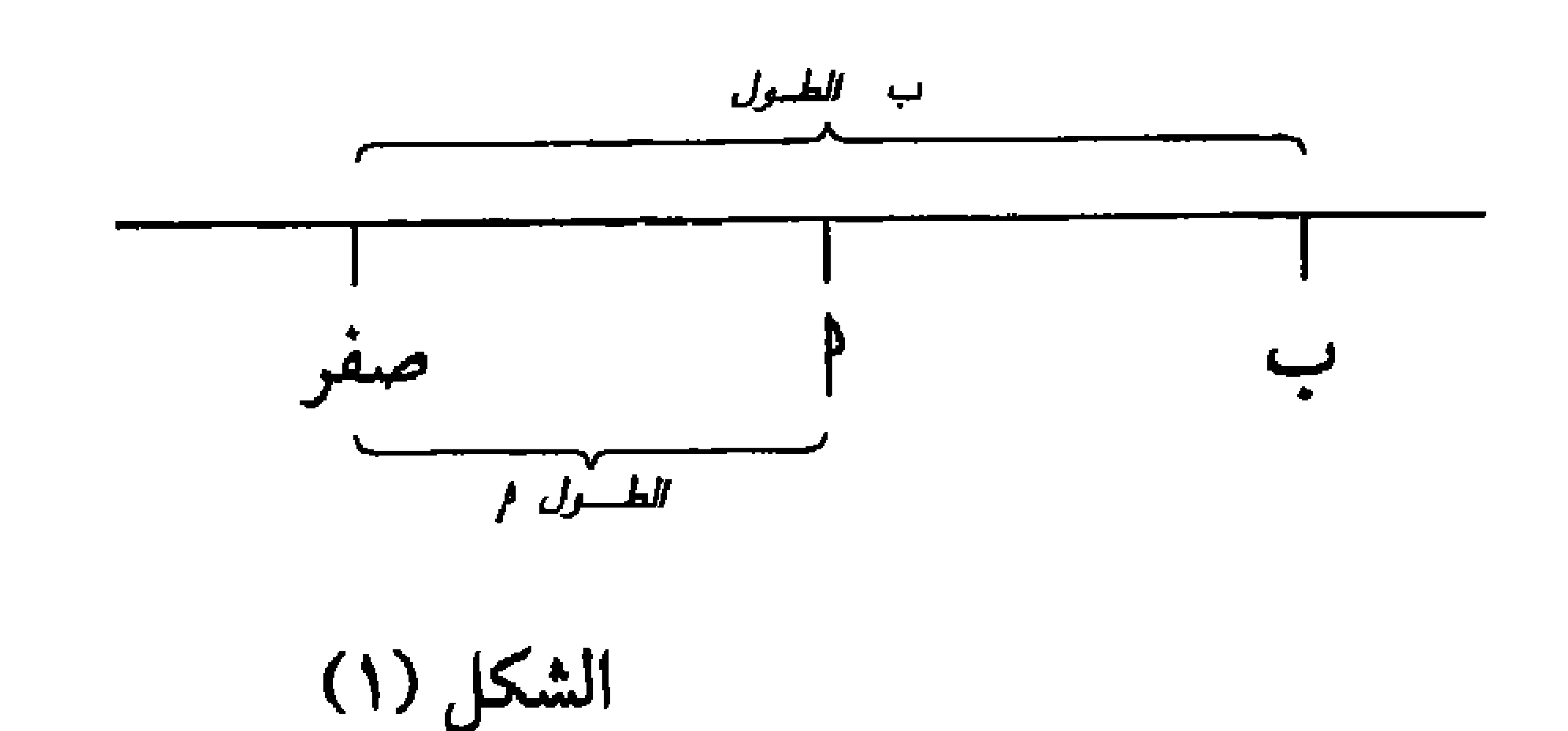
مبرهنة: مجموعة الأعداد ممكنة الإنشاء ك، تكون حقلاً جزئياً من ح.

البرهان:

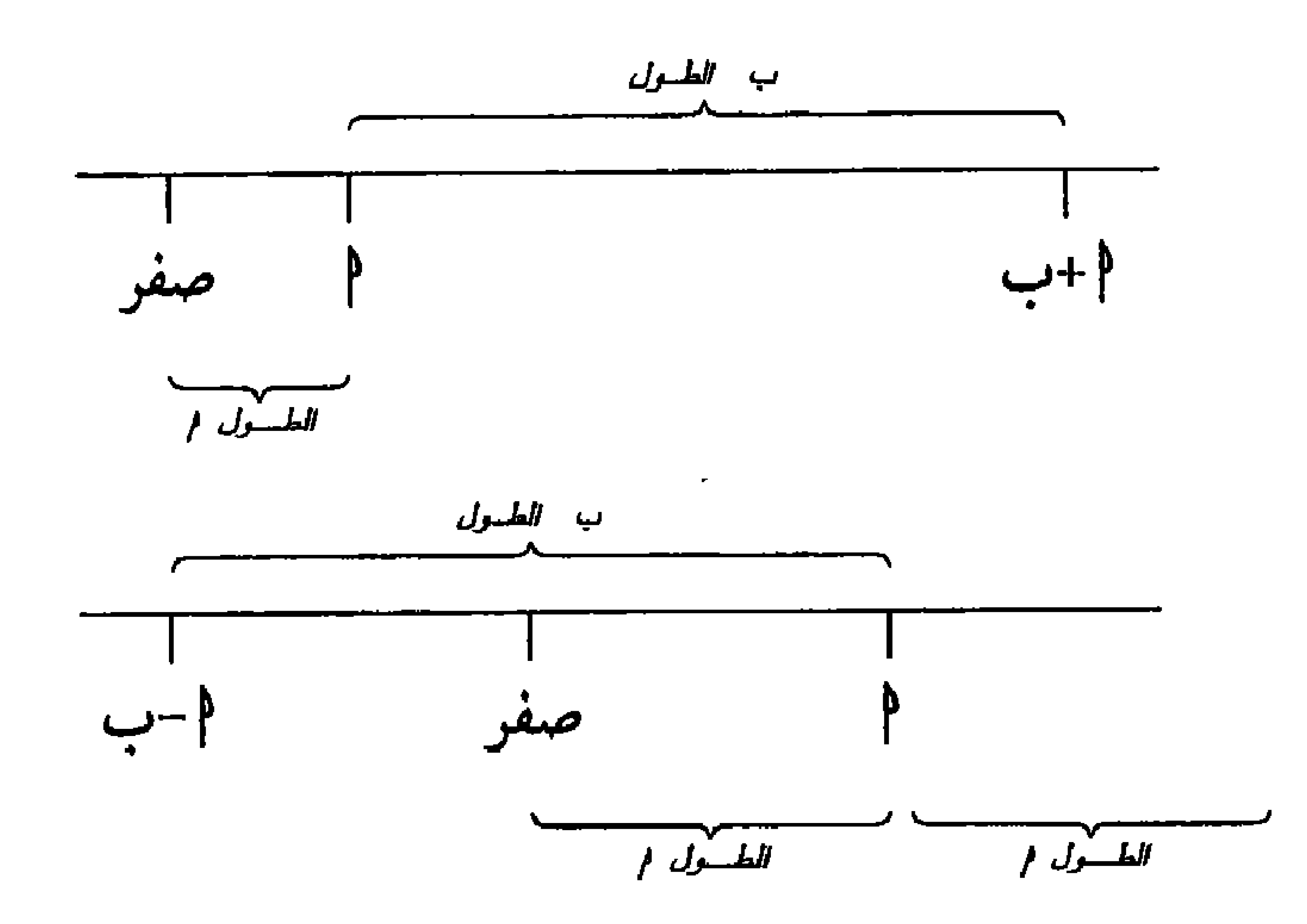
من الواضح أن ك مجموعة جزئية من ح. ولكي نثبت المبرهنة فما علينا إلا أن نبرهن بأن ك حقل. ويتم ذلك بأن نبين انتماء كل من أ+ب و أ-ب و أب وإذا كان $\frac{أ}{ب}$، ب ≠ ٠ إلى ك لكل أ و ب في ك.

ليكن أ و ب في ك هذا يعني أننا نستطيع تعيين قطعة مستقيمة طولها أ وأخرى طولها ب. والشكل المجاور (الشكل (١)).



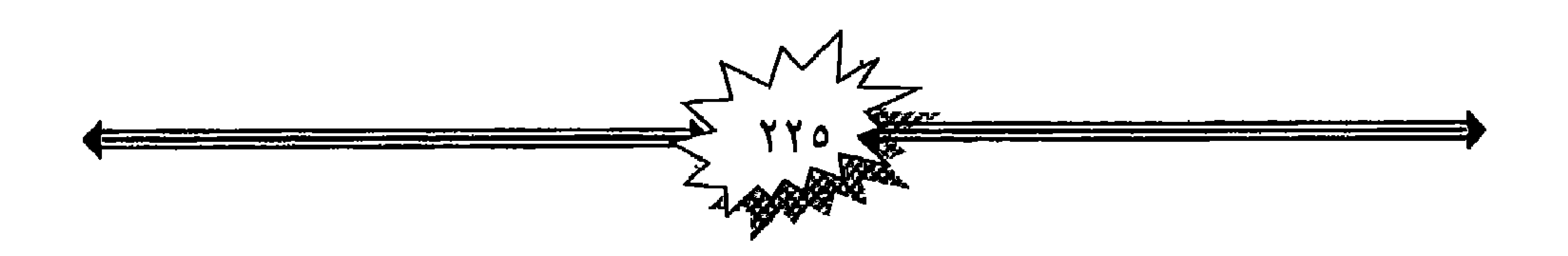


الشكل (١)

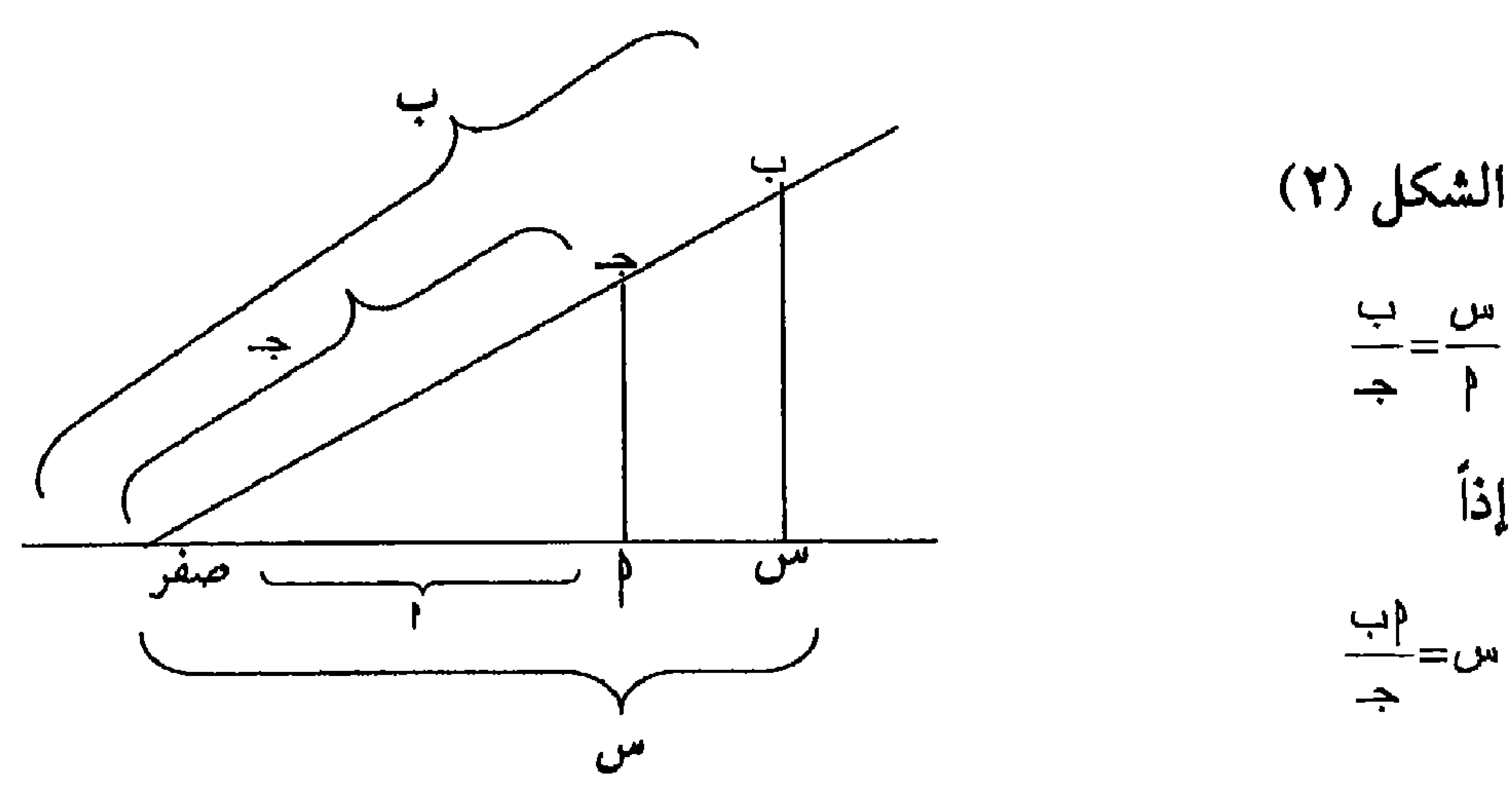


يوضح طريقة الحصول على قطعة طولها ا + ب وعلى قطعة طولها ا-ب وهذا يعني أن كلاً من ا + ب، ا − ب ينتمي إلى ك لكل ا، ب في ك.

ليكن كل من ا، ب، جـ في ك، نعين قطعة صفرا طولها ا على خط وعلى خط آخر يمر من صفر نعين قطعتين صفر ب وطولها ب و صفر جـ وطولها جـ كما في (الشكل (٢)) نعين القطعة جـ ا ومن ب نرسم موازياً لها يقطع صفر ا



في س. فنحصل على المثلثين المتشابهين صفر أ أ، صفر ب س فإذا كان طول صفر س يساوي س فإن:



الشكل (٢)

$$\frac{س}{أ} = \frac{ب}{جـ}$$

إذاً

$$س = \frac{أب}{جـ}$$

وإذا أخذنا جـ= ١ نكون قد أنشأنا أ ب. وإذا أخذنا ب= ١ نكون قد أنشأنا $\frac{أ}{جـ}$ إذاً ك حقل وهذا ينهي البرهان □.

نتيجة: الحقل ك هو امتداد للحقل ن.

البرهان:

بما أن ١ ينتمي إلى ك. وبما أن ك يحتوي على مجموع وفرق أي عنصرين فيه. إذاً ك يحتوي ط. وبما أن ناتج قسمة عدد ممكن الإنشاء على عدد ممكن الإنشاء يكون عدداً ممكن الإنشاء يكون عدداً ممكن الإنشاء. إذاً ك يحتوي على جميع الأعداد النسبية أن ن $\subset$ ك □.

قضية: إذا كانت ك عنصراً يختلف عن الصفر في ك فإن $\frac{1}{ك}$ أيضاً ينتمي إلى ك.

البرهان:

نعين القطعتين أب و ب جـ بحيث أن طول أب يساوي ك وطول ب جـ يساوي ١ على خط ثم نرسم دائرة قطرها أجـ.

نقيم عموداً على أجـ من نقطة ب فيقطع الدائرة في النقطتين (د) و (هـ) كما في (الشكل ٣)

إذاً أب. ب جـ= دب . ب هـ بالاستناد إلى مبرهنة معروفة في الهندسة المستوية.

إذاً طول كل من دب، ب هـ يساوي $\sqrt{ك}$

الشكل (٣)

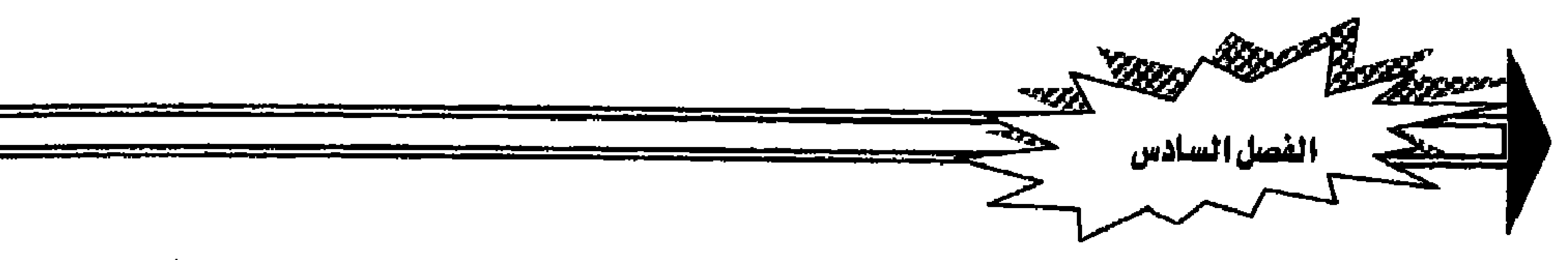
مثال (١٦): بين أن $\sqrt[4]{2}$ ممكن الإنشاء.

الحل:

نستخدم قضية سابقة في الحالة عندما ك= ٢ فنحصل على $\sqrt{2}$ والآن لدينا عدد ممكن الإنشاء هو $\sqrt{2}$ فنستخدم القضية ذاتها مرة ثانية عندما $ك=\sqrt{2}$ فنجد أن $\sqrt{\sqrt{2}}$ ممكن الإنشاء. ولكن $\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}}$ إذاً $\sqrt[4]{2}$ ممكن الإنشاء.

نستنتج مما ذكره أعلاه أننا نستطيع إنشاء أي عدد يمكن التعبير عنه باستخدام الأعداد النسبية والرموز $\sqrt{\ }$ ، ÷ ، ٠، −، +. فمثلاً كل من $1+3\sqrt{7}$، $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$2-\sqrt{\frac{2}{3}}$، $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ هو عدد ممكن الإنشاء.



مبرهنة: العدد الحقيقي α ممكن الإنشاء إذاً وفقط إذا كان α عنصراً في امتداد منته للحقل ن من النوع ن(ك$_1$، ك$_2$، ... ، ك$_ن$) حيث أن:

أ) ك$_1^2$ ينتمي إلى ن.

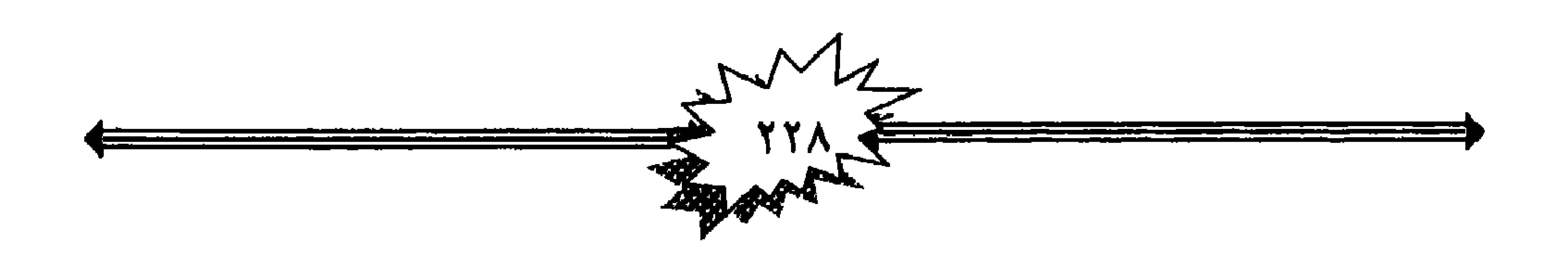
ب) ك$_ي^2$ $\in$ ن(ك$_1$، ك$_2$، ... ، ك$_{ي-1}$)، ي= ١، ٢، ... ، ن.

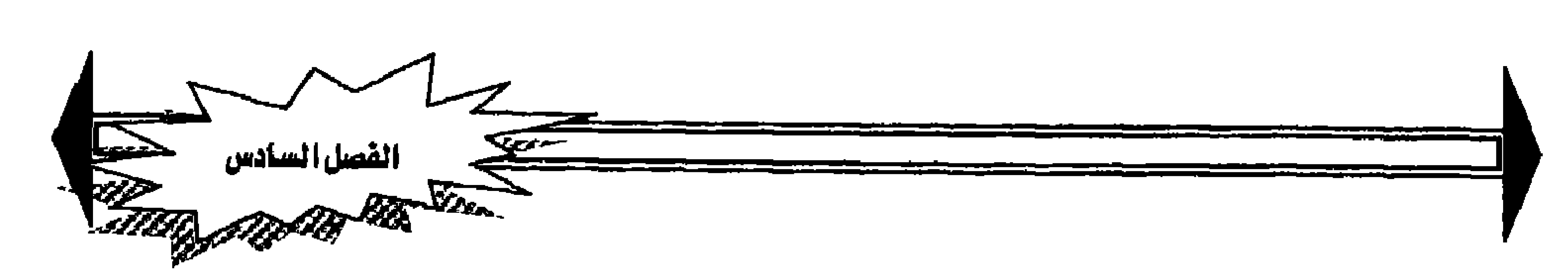
البرهان:

ليكن أ$_1$ عدداً نسبياً موجباً، فإن جميع عناصر الحقل ك$_1$=ن($\sqrt{أ_1}$) تكون أعداداً ممكنة الإنشاء. وتكون درجة ك$_1$ على ن تساوي ١ أو ٢ تبعاً لكون ك$_1$=$\sqrt{أ_1}$ عدداً نسبياً أم غير نسبياً.

وإذا كانت أ$_2$ عنصراً موجباً في ك$_1$، نجعل ك$_2$=$\sqrt{أ_2}$ فتكون جميع عناصر الحقل ك$_2$= ك$_1$(ك$_2$)= ن(ك$_1$، ك$_2$) ممكنة الإنشاء... وهكذا. إذاً تكون جميع عناصر الحقل ك= ن(ك$_1$، ك$_2$، ... ، ك$_ن$) ممكنة الإنشاء. مع ملاحظة أن هذا الامتداد للحقل ن يحقق الشروط المذكورة في نص المبرهنة. لذا فإن جميع عناصر ك ممكنة الإنشاء والآن لو كانت α عدداً ممكن الإنشاء. فإن α يظهر كمسقط (أو كإحداثي) لنقطة ممكنة الإنشاء. وباتباع عمليات الإنشاء المسموح بها نستطيع أن نبين أنه إذا كانت لدينا المجموعة أ$_ي$= {س$_1$، س$_2$، .... ، س$_ي$} من نقط ممكنة الإنشاء وحصلنا منها على نقطة أخرى س$_{ي+1}$، فإن [ن(س$_1$، س$_2$، ... ، س$_{ي+1}$): ن(س$_2$، ... ، س$_ي$)] يساوي ١ أو ٢ □.

نتيجة: إذا كان العدد α ممكن الإنشاء فإن [ن(α): ن]= ٢^م حيث أن م عدد صحيح غير سالب.





البرهان: من برهان سابق نلاحظ أنه يوجد عدد صحيح ن وأعداد حقيقية ك١، ك٢، ... ، كن بحيث أن [ن(α): ن]= [ن(ك١، ك٢، ... ، كن)، ن]

=[ن(ك١،... ، كن): ن(ك١،... ، كن-١)... [ن(ك١،... ، ك٢): ن(ك١،... ، كي-١)]... [ن(ك١): ن]

وذلك باستخدام مبرهنة سابقة.

وأن كل عامل في حاصل الضرب أعلاه يساوي ١ أو ٢.

إذاً [ن(α): ن] هو إحدى قوى العدد ٢□.

نتيجة: إذا كان العدد الحقيقي α يحقق متعدد حدود غير قابل للاختزال على حقل الأعداد النسبية وكانت درجة متعدد الحدود تساوي ك وكان العدد ك ليس من قوى العدد ٢. فإن α غير ممكن الإنشاء □.

مثال (١٧): هل يمكن إنشاء جذر لمتعدد الحدود س٤-٣س٢+١؟

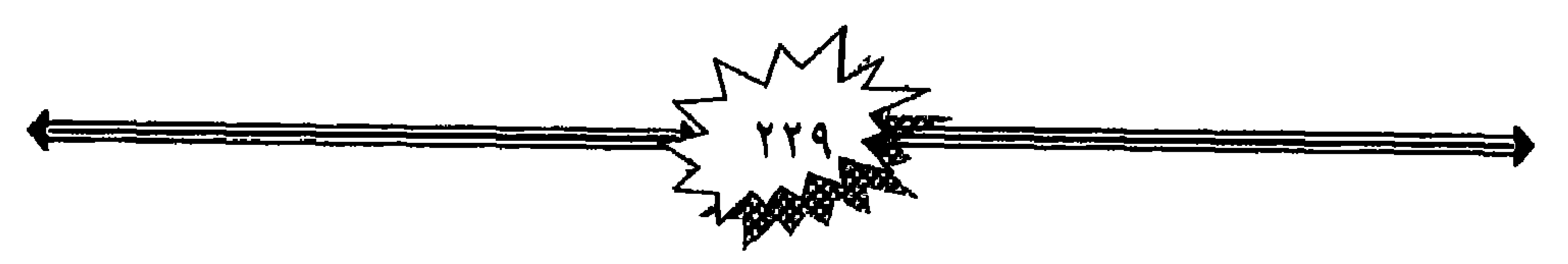
الحل:

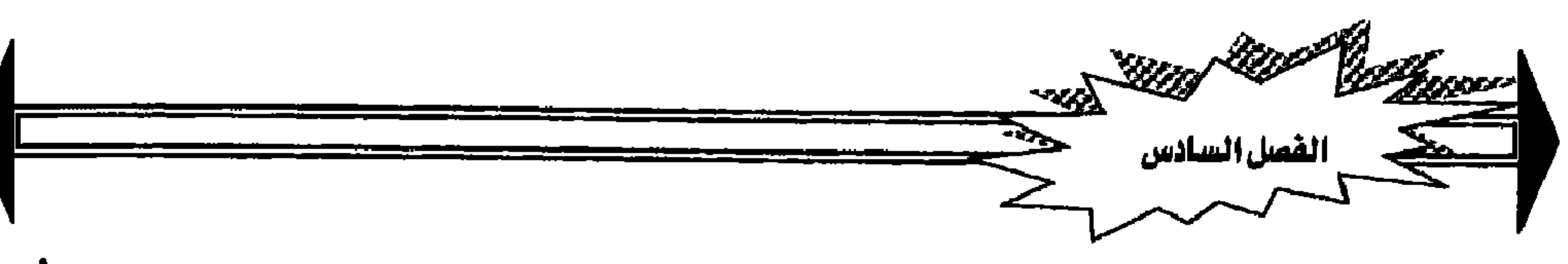
إذا كان س٤-٣س٢+١ = ٠

فإن س٢ = $\frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$ وهذا يعني أن س= $\pm\sqrt{\frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}}$

وبالاستناد إلى مبرهنة سابقة نجد أن كل هذه الأعداد ممكنة الإنشاء □.

سوف نستخدم نتيجة سابقة لبيان أنه لا يمكن تثليث الزاوية بالمسطرة والفرجال وذلك بأن نبين عدم إمكانية تثليث الزاوية التي قياسها ٦٠° بالمسطرة والفرجال.





مبرهنة: باستخدام المسطرة والفرجال، لا يمكن تثليث الزاوية التي قياسها ٦٠°.

البرهان:

لو أمكن تثليث زاوية قياسها ٦٠° بالمسطرة والفرجال لأمكن إنشاء العدد α= جتا٢٠°.

نتذكر الآن أن جتا٣٠Θ = ٤جتا$^{٣}\Theta$ – ٣جتاΘ وأن جتا٦٠° $=\frac{١}{٢}$، فتحصل من ذلك على العلاقة $٤\alpha^{٣}-٣\alpha=\frac{١}{٢}$ وهذا يعني أن $٨\alpha^{٣}-٦\alpha-١=٠$.

أي أن α جذر لمتعدد الحدود ٨س^{٣}– ٦س–١ وهو غير قابل للاختزال على ن (سنترك بيان ذلك للطالب).

وبما أن [ن(α): ن]= ٣ وأن ٣ ليس من قوى ٢ فإن α غير ممكن الإنشاء □.

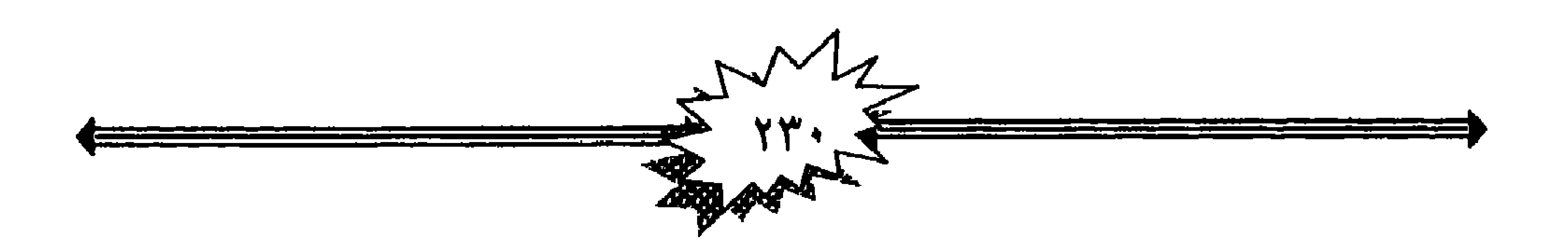
ومن المسائل الكلاسيكية الأخرى التي يمكن أن نجيب عليها الآن بالنفي، مسألة تضعيف المكعب. أي إنشاء مكعب حجمه ضعف حجم مكعب معلوم.

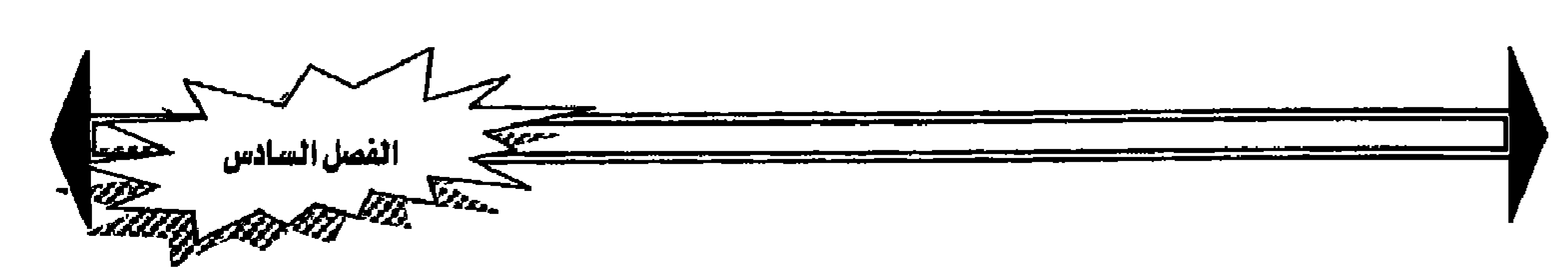
فإذا كان طول ضلع المكعب المعلوم ١ فإن حجمه يساوي ل^{٣} وللحصول على مكعب حجمه مكعب حجمه ٢ل^{٣}، علينا أن ننشئ العدد ل$\sqrt[٣]{٢}$.

قضية: العدد $\sqrt[٣]{٢}$ غير ممكن الإنشاء.

البرهان:

العدد $\sqrt[٣]{٢}$ يحقق متعدد الحدود س^{٣}–٢. وهو غير قابل للاختزال على ن. وبما أن [ن($\sqrt[٣]{٢}$):ن] يساوي ٣ وهو ليس من قوى ٢ فإن $\sqrt[٣]{٢}$ غير ممكن الإنشاء □.





وبما أننا لا نستطيع إنشاء $\sqrt[3]{2}$ فإننا لا نستطيع الحصول على ل$^3\sqrt{2}$ من ل لذا لا يمكن تضعيف المكعب. والآن نتعرض للمسألة الكلاسيكية الثالثة وهي مسألة تربيع الدائرة. أي إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة دائرة معلومة. فإذا كان نصف قطر الدائرة المعلومة ر فإن مساحتها πر^2 يكون طول ضلعه ر$\sqrt{\pi}$.

فإذا أمكن إنشاء $\sqrt{\pi}$ فيمكن تربيع الدائرة.

قضية: تكون درجة امتداد ن$(\sqrt{\pi})$ على ن غير منتهية. وبالتالي فإن $\sqrt{\pi}$ غير ممكن الإنشاء.

البرهان:

سوف نحتاج إلى الاعتماد على كون π عدداً لا جبرياً أي أن π لا يحقق أي متعدد حدود على ن وسوف نقبل هذه الحقيقة بدون برهان.

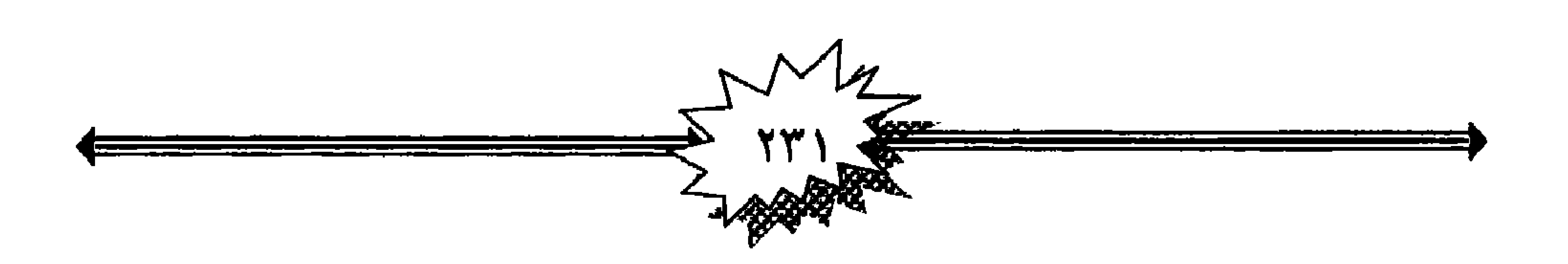
ن(π) هو حقل جزئي من ن$(\sqrt{\pi})$ لأن $\pi = (\sqrt{\pi})^2 \in$ ن$(\sqrt{\pi})$ وبما أن π لا جبري فإن جميع قوى π، أي π، π^2، π^3، ... تكون مستقلة خطياً على ن هذا يعني أن [ن(π): ن] غير منته.

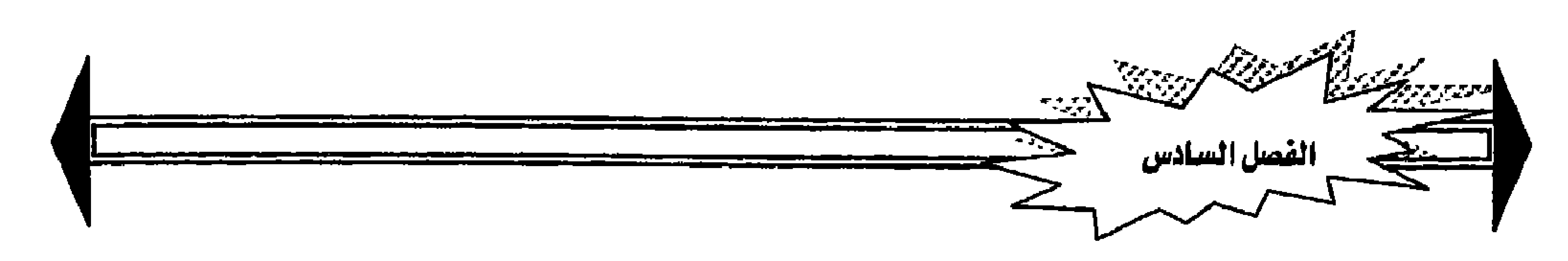
وهذا يؤدي إلى أن:

$$[ن(\sqrt{\pi}):ن] = [ن(\sqrt{\pi}):ن(\pi)][ن(\pi):ن]$$

غير منته أيضاً. وهذا يعني أن $\sqrt{\pi}$ غير ممكن الإنشاء □.

أي أن تربيع الدائرة غير ممكن أيضاً.





تمارين

ليكن الحقل ق حقلاً من الأعداد ممكنة الإنشاء. نسمي مجموعة النقط التي تكون إحداثياتها في ق مستوى ق.

١- إذا كان ﺃس+ ب ص + جـ = ٠ خطاً في ق، فإن ﺃ، ب، جـ تكون عناصر في ق.

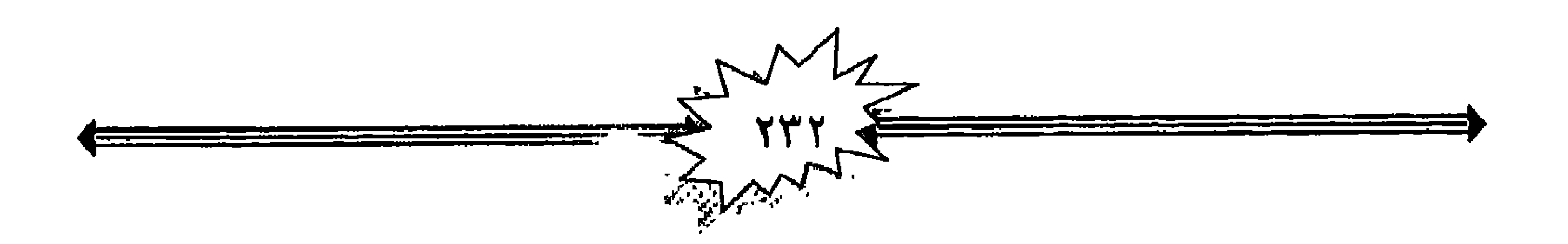
٢- إذا كان س + $\text{ص}^{٢}$ + ﺃس + ب ص + جـ = ٠ دائرة في ق فإن ﺃ، ب، جـ تنتمي إلى ق.

٣- برهن أنه إذا تقاطع خطان في ق في نقطة على المستوى الحقيقي، فإن نقطة التقاطع تقع في مستوى ق.

٤- أي من الأعداد الآتية ممكن الإنشاء؟

ﺃ) $\sqrt[٤]{٥+\sqrt{٢}}$ ب) $\sqrt[٦]{٢}$

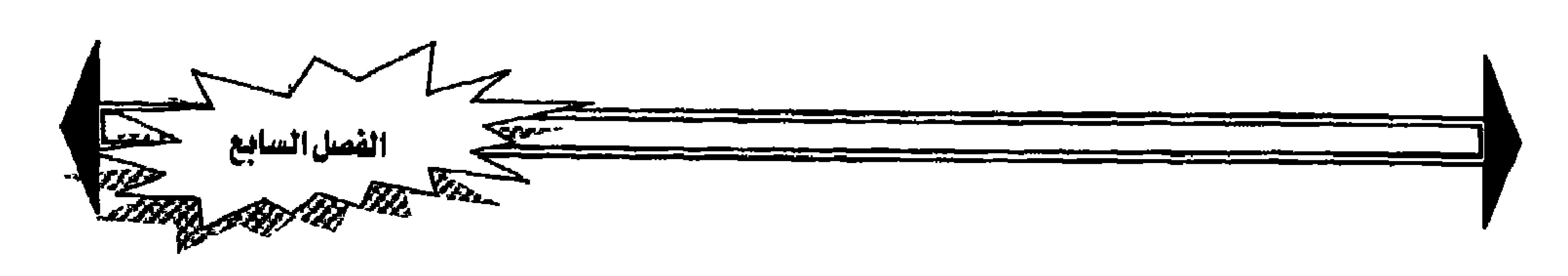
جـ) $١-\sqrt[٥]{٢٧}$ د) $\left(١-٤\sqrt{٧}\right)^{٣}$





التفاضل

Ditterentiation



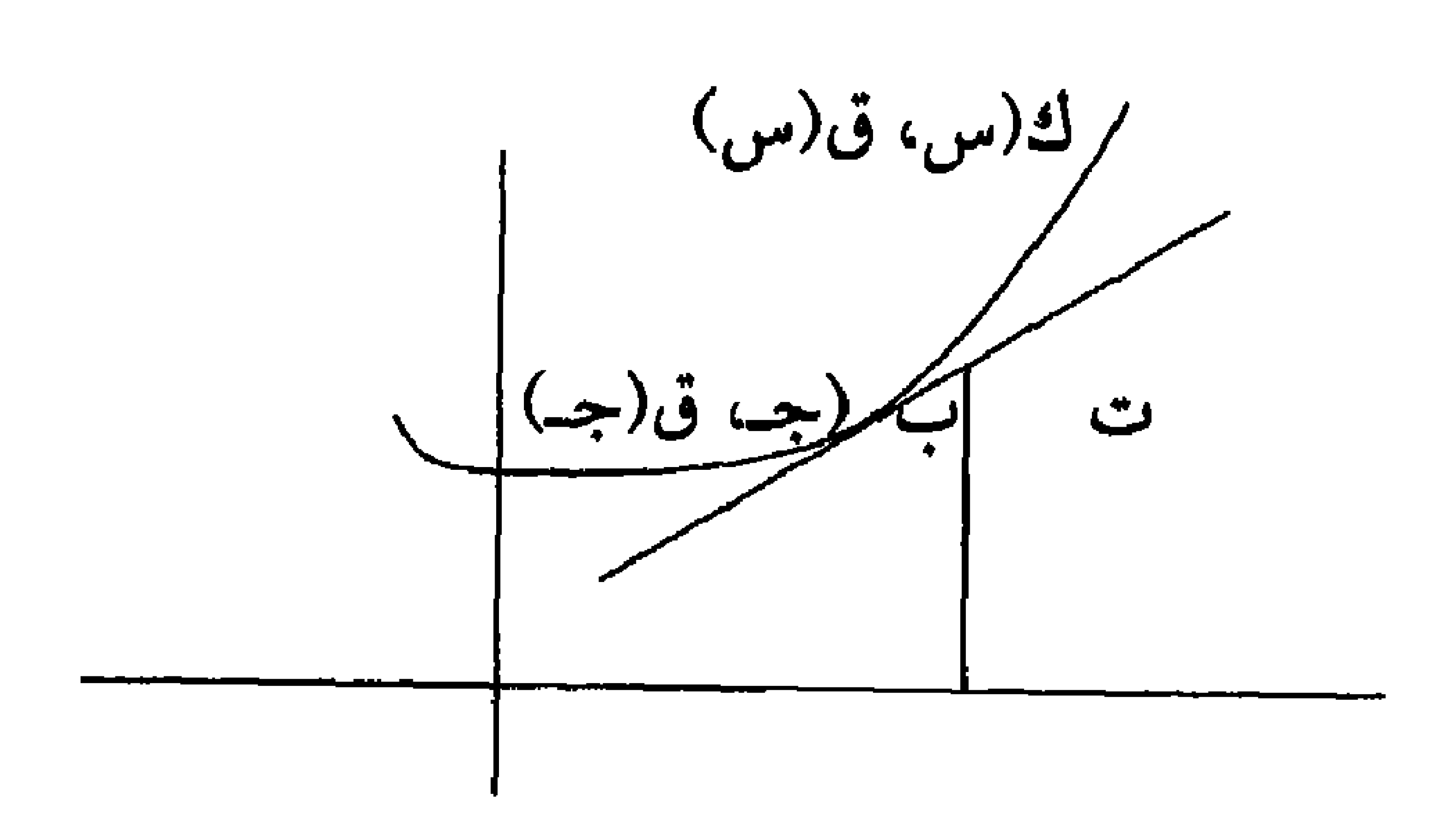
الفصل السابع

التفاضل

Differentiation

الاشتقاق: The Derivation

لتكن ق دالة بحيث ص= ق(س)، ولنفرض أن قاطع لمخطط الدالة ق يمر بالنقطتين ك(س، ق(س) و ب(س + Δس، ق(س + Δس)) على منحنى الدالة ب(س + Δس، ق(س + Δس))

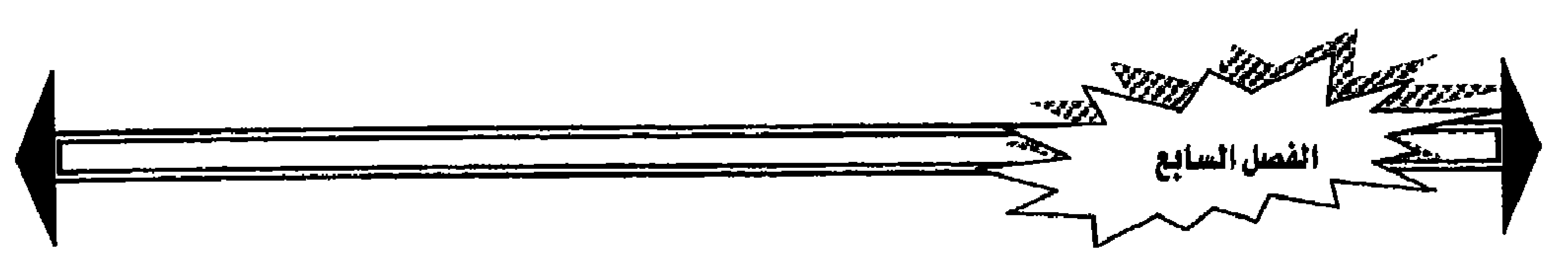


إن ميل القاطع ب ك هو $\frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}$

فعندما تقترب Δس من الصفر، فإن س + Δس يقترب من س ومن ثم تقترب النقطة ب من ك على امتداد منحنى الدالة ق وإن ميل كب يقترب من

$$\lim_{\Delta س \to 0} \frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}$$





فإذا كانت هذه الغاية موجودة، فإنها عندئذ تساوي ميل المماس في النقطة ك(س، ق(س)) ويسمى أيضاً مشتقة ق في س.

تعريف (١):

لتكن ق دالة بحيث أن ص= ق(س) لكل س ∋ ح. إن مشتقة الدالة بالنقطة س هي العدد الحقيقي.

$$\lim_{\Delta س \to 0} \frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}$$

بشرط أن تكون هذه الغاية موجودة.

يقال أن الدالة ق قابلة للاشتقاق في س إذا كانت الغاية موجودة. أما إذا كانت الغاية غير موجودة، فيقال أن الدالة غير قابلة للاشتقاق في س.

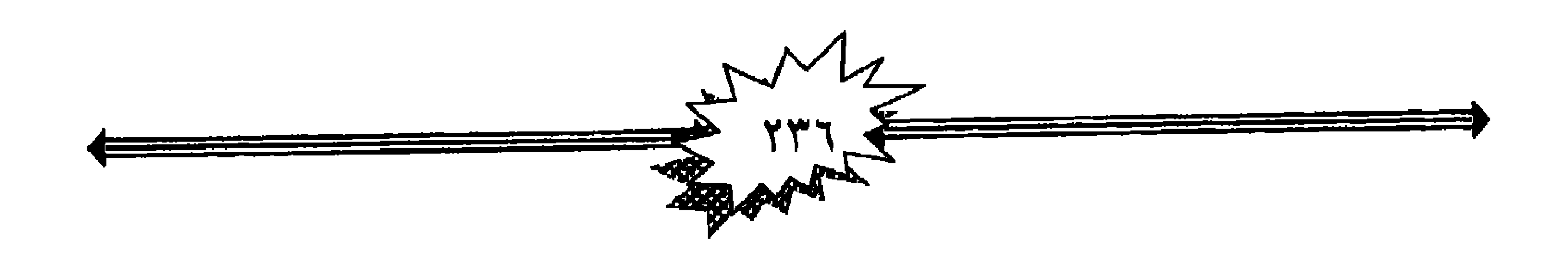
نعرف قَ بأنها دالة بحيث أن $قَ(س) = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}$

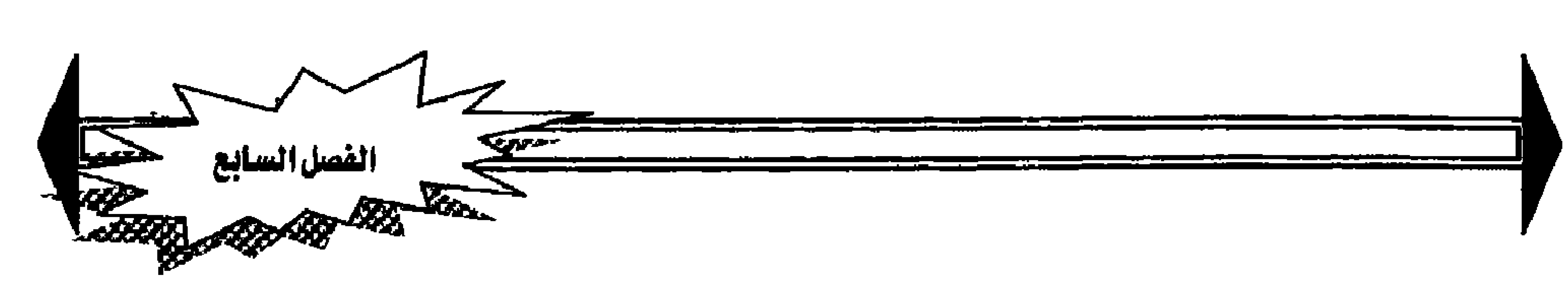
وتسمى قَ مشتقة الدالة ق بينما قيمة المشتقة قَ(س) فتكون مشتقة الدالة ق بالنقطة س.

إذا كانت الدالة ق قابلة الاشتقاق في كل نقطة من نقاط منطلقها، فنقول أن ق دالة قابلة للاشتقاق. في حالة ق قابلة للاشتقاق فإن منطلق كل من الدالتين ق، قَ يكون واحد.

مثال (١):

لتكن ق دالة بحيث أن ق(س)= ٣س-٢ لكل س ∋ ح. والمطلوب إيجاد قَ.





بما أن $\frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}$

$$=\frac{[٣(س+\Delta س)-٢]-(٣س-٢)}{\Delta س}=\frac{٣\Delta س}{\Delta س}=٣$$

وأن $ق'(س)=\lim_{\Delta س\to ٠}\frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}=\lim_{\Delta س\to ٠}٣=٣$

وهذا يكون قَ(س)= ٣ لكل س ∋ ح أي أن الدالة ق قابلة الاشتقاق وأن مشتقتها هي قَ بحيث أن قَ(س)= ٣.

مثال (٢):

جد قَ(٠) و قَ(٢) للدالة ق بحيث أن $ق(س)=\begin{cases}\frac{١}{س} & ، س\neq ٠\\ ٠ & ، س=٠\end{cases}$

فعندما س=٠ يكون لدينا

$$\frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}=\frac{\frac{١}{٠+\Delta س}-٠}{\Delta س}=\frac{١}{(\Delta س)^{٢}}$$

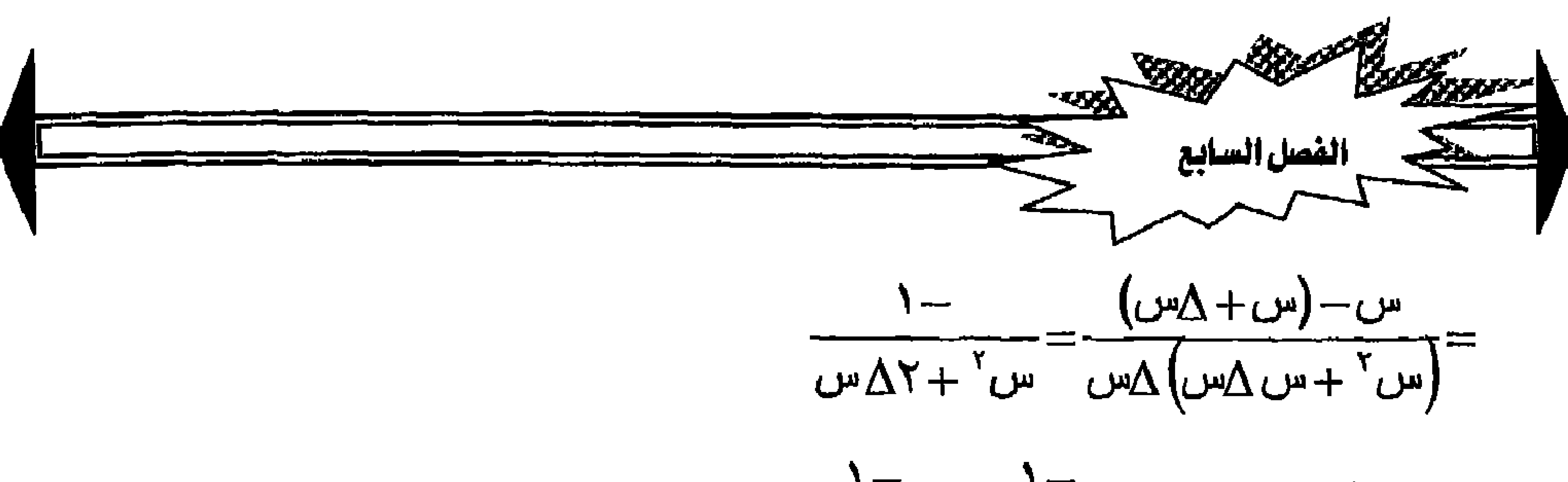
وأن

$$ق'(٠)=\lim_{\Delta س\to ٠}\frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}=\lim_{\Delta س\to ٠}\frac{١}{(\Delta س)^{٢}}$$

حيث أن الغاية غير موجودة، أي أن الدالة ق غير قابلة الاشتقاق بالنقطة س= ٠ وعندما س= ٢، فإن

$$\frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}=\frac{\frac{١}{س+\Delta س}-\frac{١}{س}}{\Delta س}$$





$$= \frac{س - (س + \Delta س)}{(س^٢ + س \Delta س) \Delta س} = \frac{-١}{س^٢ + ٢ \Delta س}$$

$$\text{وأن } ق'(٢) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{-١}{٢^٢ + ٢ \Delta س} = \frac{-١}{٤}$$

في الحقيقة، إن لكل س $\neq$ ٠ يكون لدينا $ق'(س) = \frac{-١}{س^٢}$، حيث أن الدالة ق غير مستمرة بالنقطة س= ٠ وأنه من المستحيل رسم مستقيم مماس الدالة ق بالنقطة (٠، ٠).

إذا كانت الدالة ق بحيث أن ص = ق(س) قابلة للاشتقاق فإنه من الممكن كتابة مشتقتها بالشكل $\frac{د ص}{د س}$ أو $\frac{د(ق(س))}{د س}$ كما كتبها العالم ليبتز.

فمثلاً إذا كانت الدالة ص بحيث أن ص= $س^٢$، فإن مشتقتها هي:

$$\frac{د(س^٢)}{د س} = ٢س \quad \text{أو} \quad \frac{د ص}{د س} = ٢س$$

$$\text{وذلك لأن } \frac{د ص}{\Delta س} = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{(س + \Delta س)^٢ - س^٢}{\Delta س}$$

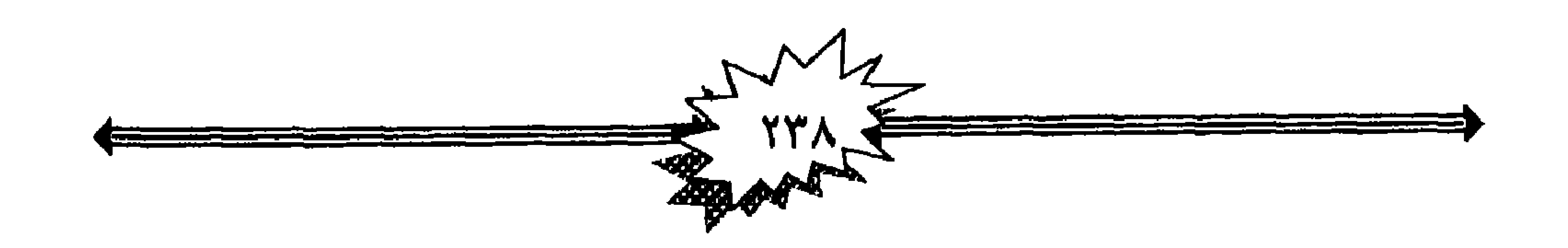
$$= \lim_{\Delta س \to ٠} (٢س + \Delta س) = ٢س$$

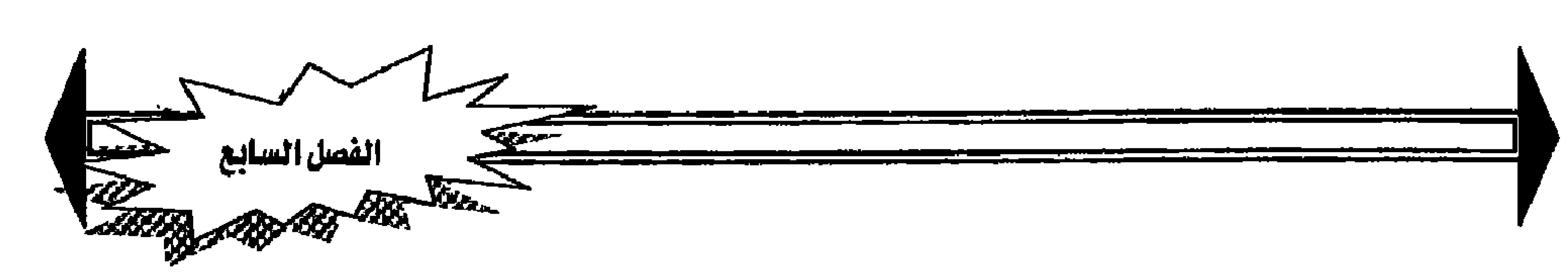
أما مشتقة الدالة بنقطة معينة س. فيمكن كتابتها بالشكل

$$\left. \frac{د ق(س)}{د س} \right|_{س = س_٠} \quad \text{أو} \quad \left. \frac{د ص}{د س} \right|_{س = س_٠}$$

نظرية: إن مشتقة الدالة الخطية ق

بحيث أن ق(س)= م س + ب لكل عددين حقيقيين ثابتين م، ب





ولكل س ∋ ح هي الدالة التابعة قَ.

بحيث أن قَ(س)= م. أي أن $\frac{د(م س+ب)}{د س}=م$

البرهان: بما أن

$$ق(س)= \underset{\Delta س \to ٠}{نها} \frac{[م(س+\Delta س)+ب]-(م س+ب)}{د س}$$

$$= \underset{\Delta س \to ٠}{نها} \frac{م س+م\Delta س+ب-م س-ب}{\Delta س}= \underset{\Delta س \to ٠}{نها} \frac{م\Delta س}{\Delta س}=م$$

نتيجة (١): إن مشتقة الدالة الثابتة ق بحيث أن ق(س)= جـ هي الدالة قَ بحيث أن قَ(س)= ٠ أي أن $\frac{د(جـ)}{د س}=٠$

نظرية:

لكل ن ∋ ن⁽¹⁾، فإن مشتقة الدالة ق

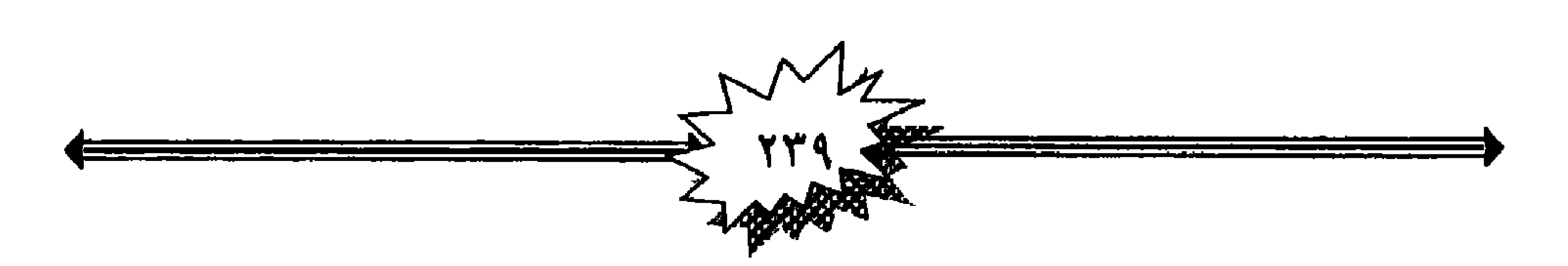
بحيث أن ق(س)= $س^{ن}$ لكل س ∋ ن⁽¹⁾ هي الدالة قَ

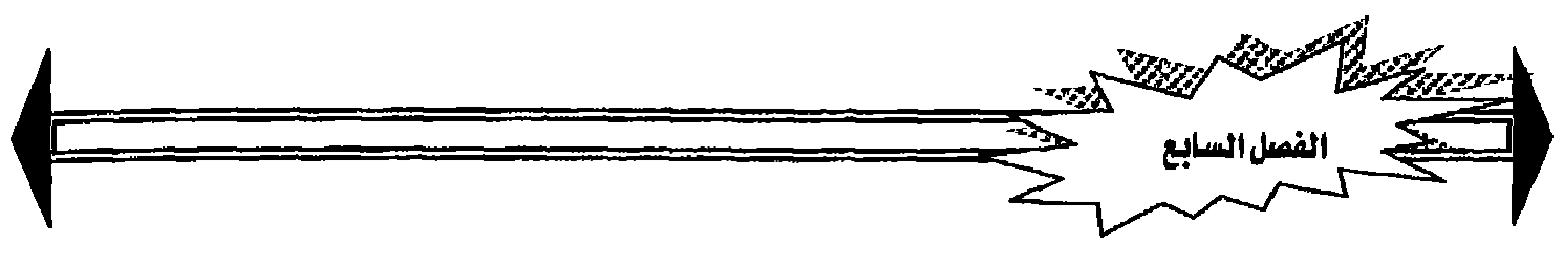
بحيث أن قَ(س)= ن $س^{ن-١}$. أي أن

$$\frac{د(س^{ن})}{د س}=ن س^{ن-١}$$

البرهان: بما أن $\frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}=\frac{(س+\Delta س)^{ن}-س^{ن}}{\Delta س}$

$$=\frac{\left[س^{ن}+ن س^{ن-١}\Delta س+\frac{ن(ن-١)}{٢}س^{ن-٢}(\Delta س)^{٢}...+(\Delta س)^{ن}\right]-س^{ن}}{\Delta س}$$





$$= ن س^{ن-١} + \frac{ن(ن-١)}{٢} س^{ن-٢} (\Delta س) + ... + (\Delta س)^{ن-١}$$

وأن $$قَ(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ق(س+\Delta س) - ق(س)}{\Delta س}$$

$$= \lim_{\Delta س \to ٠} \left[ن س^{ن-١} + \frac{ن(ن-١)}{٢} س^{ن-٢} (\Delta س) ... + (\Delta س)^{ن-١} \right] = ن س^{ن-١}$$

وذلك لأن جميع الحدود عدا الحد الأول تشمل Δس والتي تجعلها مساوية للصفر.

مثال (٣):

إن مشتقة الدالة ق بحيث أن ق(س)= ٧س + ٢ هي الدالة قَ

بحيث أن قَ(س)= ٧ وأن مشتقة الدالة ق

بحيث أن ق(س)= $س^{٣١٧}$ هي الدالة قَ.

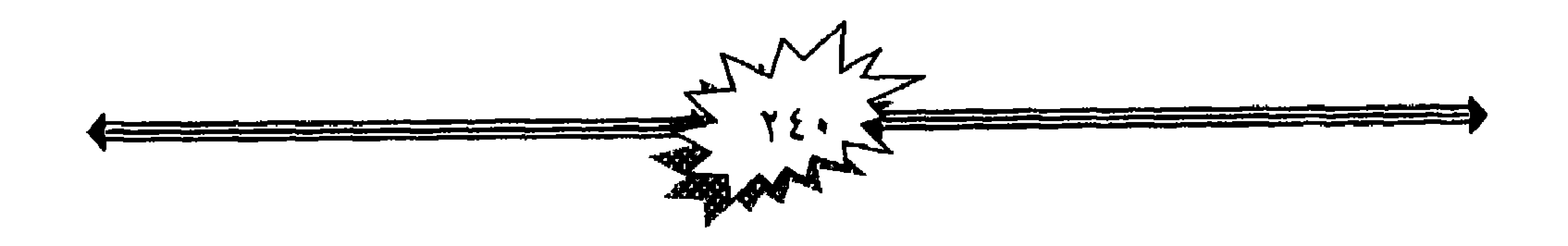
بحيث أن قَ(س)= ٣١٧$س^{٣١٦}$ ومشتقة الدالة الذاتية ق

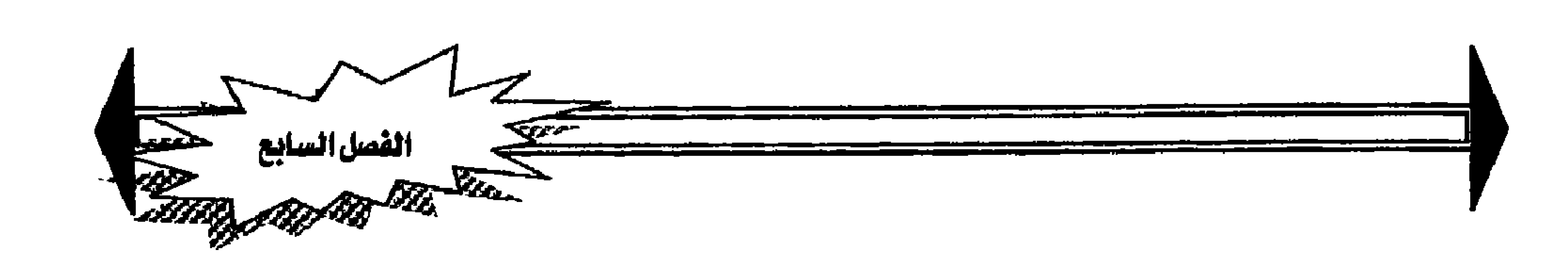
بحيث أن ق(س)= س هي الدالة قَ بحيث أن قَ(س)=١

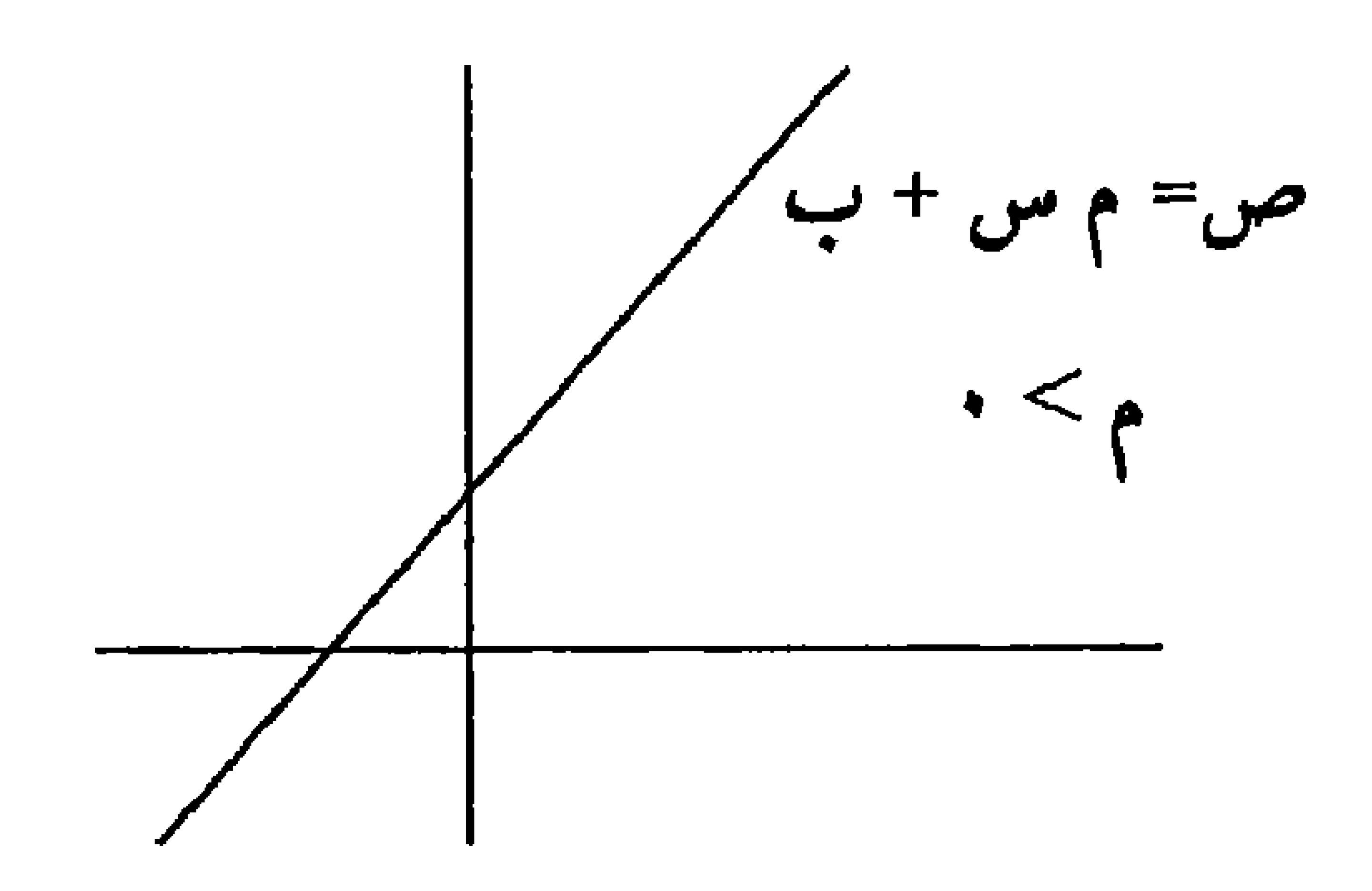
بما أن مشتقة الدالة ق هي ميل المماس لمنحنى الدالة ق في كل نقطة

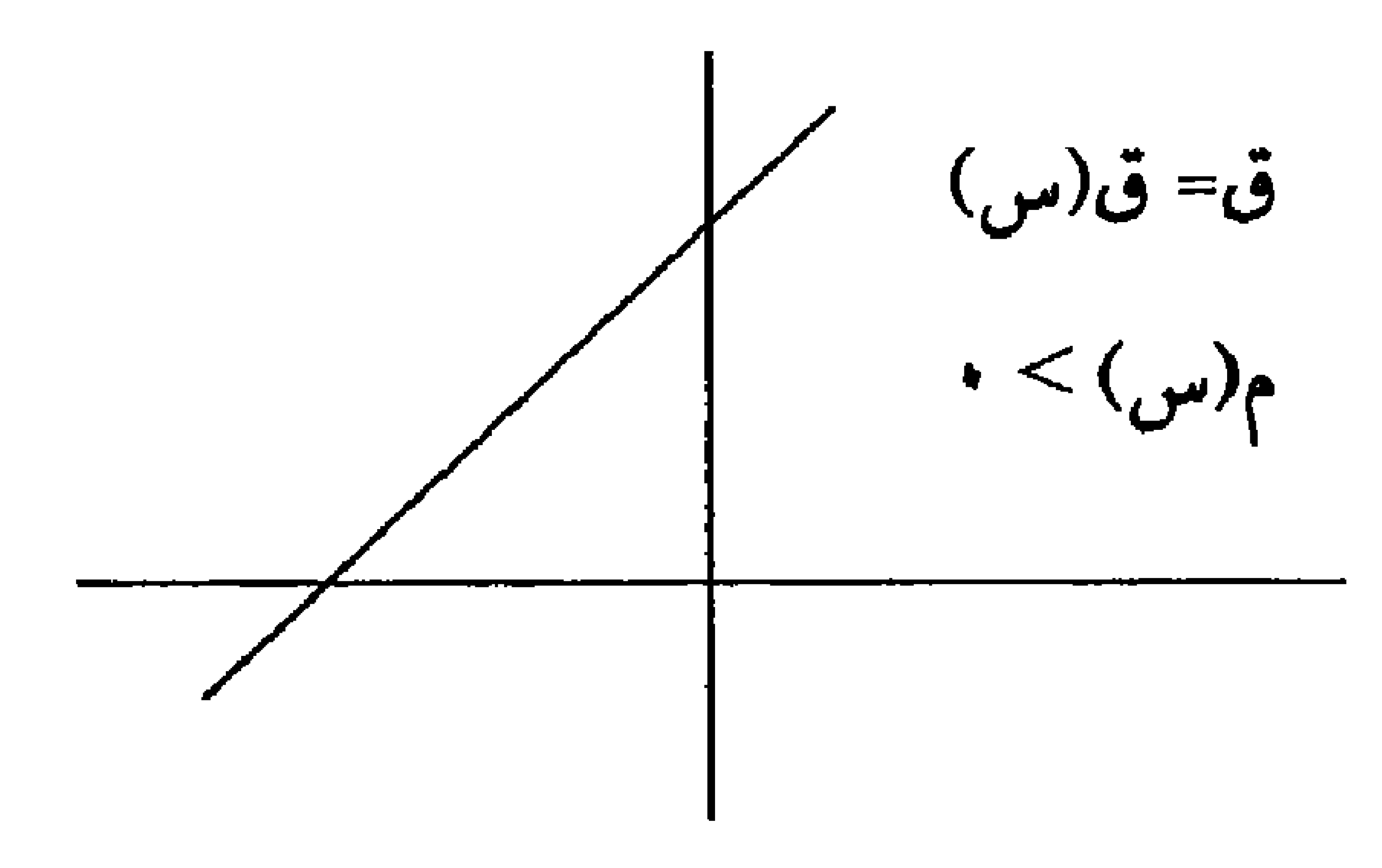
فإن لإشارة هذه المشتقة أهمية كبيرة في رسم مخطط الدالة.

يقال للمستقيم بأنه متزايد إذا كان ميله موجباً وبالمثل فإن الدالة ق تكون متزايدة إذا كانت مشتقتها موجبة.





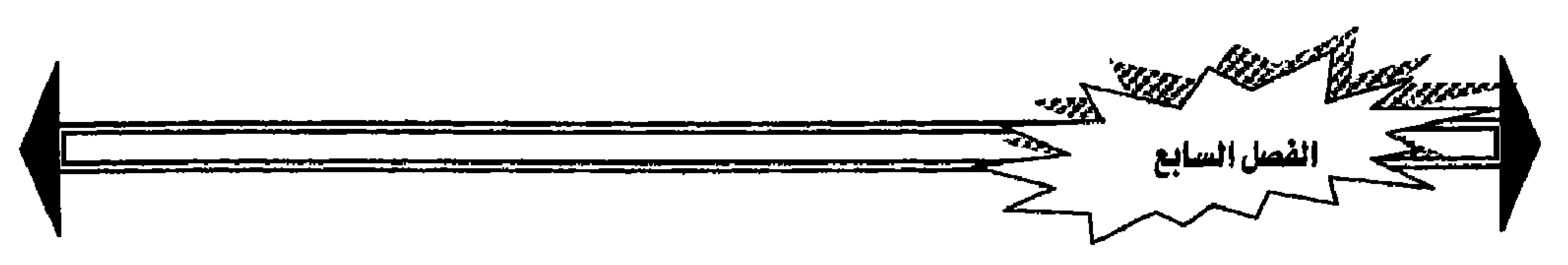




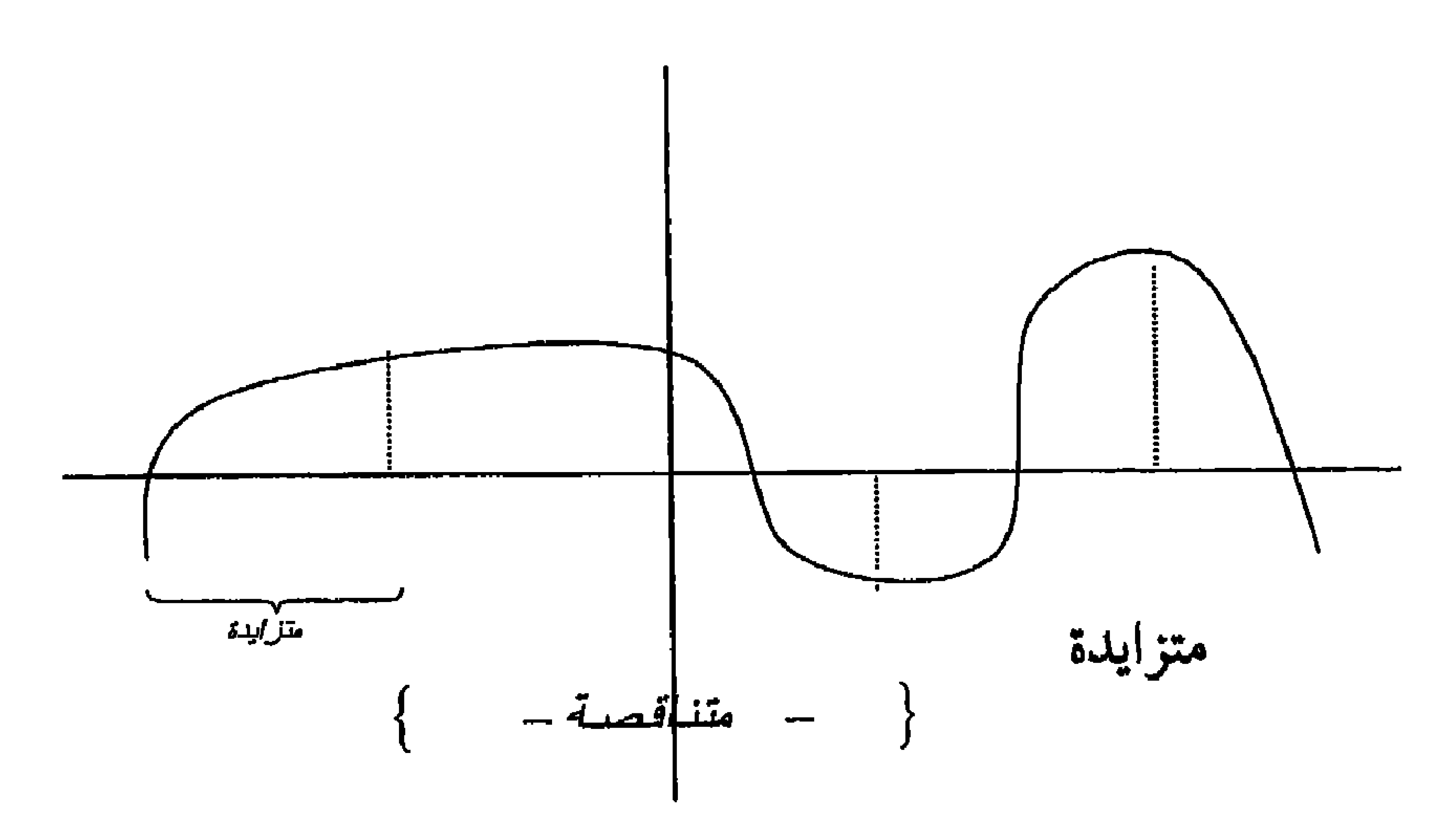
يقال للمستقيم بأنه متناقض إذا كان ميله سالباً وللدالة بأنها متناقضة إذا كان اشتقاقها سالباً.

ق(س)= م س + ب

م < ٠



وعلى هذا يمكن استخدام إشارة المشتقة لتوضيح فيما إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة بفترات معينة حيث أن الدالة تكون متزايدة بالفترة التي تكون فيها المشتقة موجبة وتكون الدالة متناقصة بالفترات التي تكون فيها المشتقة سالبة.



نظرية: لتكن ق دالة قابلة للاشتقاق بالفترة ل بحيث أن قَ(س) ≠ ٠ لكل س ∈ ل ما عدا لبعض نقاط في طرفي ل أحياناً.

١- تكون ق متزايدة بالفترة ل إذا كان قَ(س) > ٠

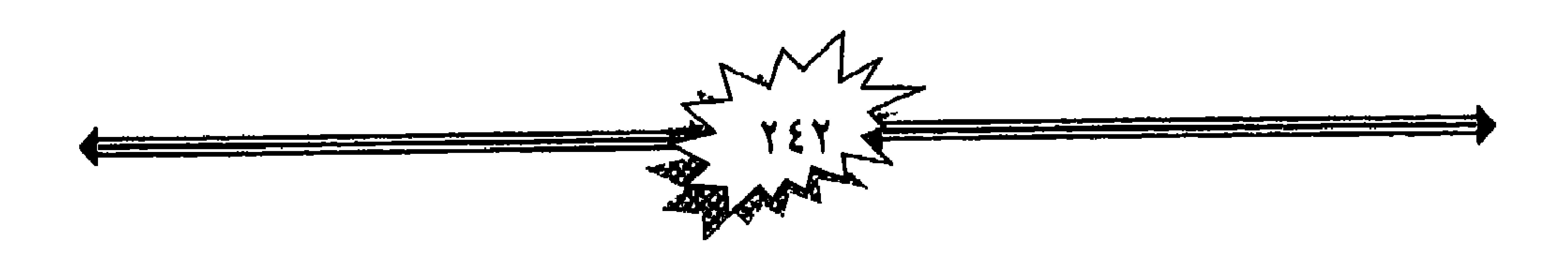
٢- تكون ق متناقصة بالفترة ل إذا كان ق(س) < ٠

مثال (٤):

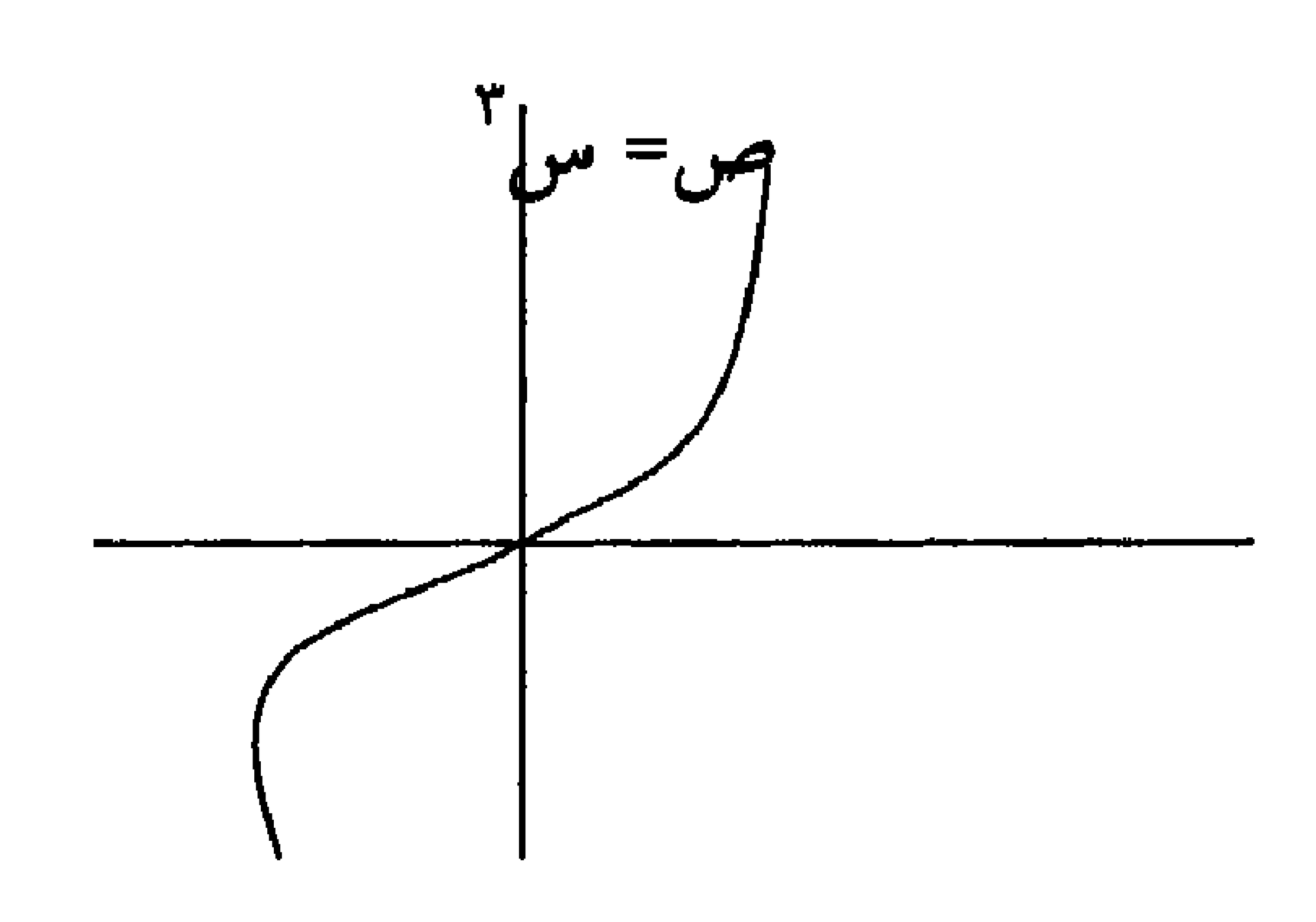
لتكن ق دالة بحيث أن ق(س)= س^{٣} لكل س ∈ ح

تكون المشتقة قَ(س)= ٣س^{٢} موجبة فيما عدا س = ٠.

أي أن الدالة ق متزايدة بالفترتين [٠، ∞] و [−∞، ٠] وبكلام آخر:



فإن ق متزايدة بالفترة [-∞، ∞]



مثال (٥):

لتكن ك دالة بحيث أن ك(س)= س^{٣}-١٢س لكل س ∈ ح

ولما كان كَ(س)= ٣س^{٢} – ١٢

فإن كَ(س) < ٠ عندما ٣س^{٢} < ١٢

أي عندما س^{٢} < ٤ أو س ∈ [-٢، ٢]

أي أن ك متناقصة بالفترة المغلقة [-٢، ٢]

وكَ(س) > ٠ في س ∈ [٢، ∞] و س ∈ [-∞، -٢]

حيث تكون الدالة متزايدة بالفترتين و [٢، ∞] و [-∞، -٢]

يقال للنقاط في منطقة الدالة ق.

بحيث أن قَ(س) = ٠ بنقاط النهايات للدالة ق (critical points) ففي الدالة ق بحيث أن ق(س)= س^{٣}، تكون س = ٠ بنقطة النهاية.



تمارين

١- جد قَ(س) لكل من الدوال ق بحيث أن:

أ- ق(س)= $س^2$ ب- ق(س)= $س^5$

جـ- ق(س)= س+٦   د- ق(س)= ٤-٣س

هـ- ق(س)= ٢+٣   و- ق(س)= ١٠

٢- جد $\frac{دص}{دس}$ لكل من الدوال التالية، بواسطة تعريف الاشتقاق:

أ- ص= $س^2$-س+١   ب- ص= $\frac{1}{س}$

جـ- ص= $\frac{1}{س^2}$ د- ص= $\sqrt{٢س+٣}$

هـ- ص= $\frac{1}{٢س+١}$ و- ص= $\frac{1}{\sqrt{س}}$

٣- جد قَ لكل من الدوال التالية، بواسطة التعريف.

أ- ق(س)= س+ $\frac{1}{س}$ ب- ق(س)= ٢$س^2$-٣س+٥

جـ- ق(س)= $س^{\frac{1}{2}}$ د- ق(س)= $\frac{س+٢}{س+٣}$

٤- جد الفترات التي فيها ق متزايدة والفترات التي فيها ق متناقصة.

وكذلك جد نقاط النهايات للدالة ق. لكل من الدوال التالية. ارسم:

أ- ق(س)= $س^2$-س+١   ب- ق(س)= $\frac{1}{س}$



جـ - $ق(س)= س^{٢}-٢س-٣$ د- $ق(س)= ٤-س^{٢}$

٥- برهن أن الدالة ق بحيث أن $ق(س)=\frac{س+١}{س-١}$ متناقصة في أي فترة لا تشمل النقطة س=١.

٦- إذا كانت ق دالة قابلة للاشتقاق، برهن أن:

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ق(س_{٠}+\Delta س)-ق(س_{٠}-\Delta س)}{\Delta س}=٢\ قَ(س_{٠})$$

٧- لتكن ق دالة قابلة الاشتقاق في م $س_{٠}$+ب

فإذا كانت ق(س)= ق(م س + ب)

برهن أن ق $(س_{٠})$= م قَ(م $س_{٠}$ + ب)

استمرارية الدوال القابلة للاشتقاق:

نظرية: تكون الدالة القابلة الاشتقاق في نقطة، مستمرة بتلك النقطة.

البرهان:

لتكن الدالة ق بحيث أن ص= ق(س) قابلة الاشتقاق بالنقطة $س_{٠}$ فإن الغاية

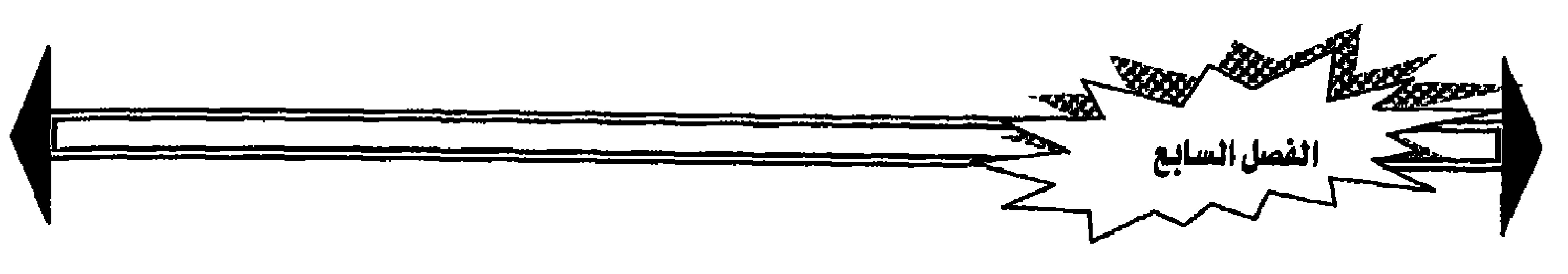
$$قَ(س_{٠})= \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ق(س_{٠}+\Delta س)-ق(س_{٠})}{\Delta س}$$ موجودة

أي أن

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ق(س_{٠}+\Delta س)-ق(س_{٠})}{\Delta س} = \lim_{\Delta س \to ٠} \Delta س$$

$$= قَ(س_{٠}) \ ،\ \lim_{\Delta س \to ٠} \Delta س= قَ(س_{٠})(٠)=٠$$





أي أن المعادلة

$$\lim_{\Delta س \to 0} \left(ق(س_0 + \Delta س) - ق(س_0) \right) = 0$$

$\lim_{\Delta س \to 0} ق(س_0 + \Delta س) = ق(س_0)$ فإذا كانت س= $س_0 + \Delta س$

فعندما تقترب Δس من العنصر فإن س تقترب من $س_0$ ومنها نحصل أن $\lim_{\Delta س \to 0} ق(س) = ق(س_0)$

وهذا يبين أن الدالة ق بحيث أن ص= ق(س) مستمرة بالنقطة $س_0$.

تبين هذه النظرية أن "قابلية الاشتقاق تتضمن الاستمرارية" إلا أن العكس غير صحيح إذ يمكن أن تكون الدالة مستمرة في نقطة إلا أنها غير قابلة للاشتقاق في تلك النقطة كما في المثال التالي.

مثال (١): أن الدالة ق بحيث أن ق(س)= |س| مستمرة بالنقطة س= ٠ ولكنها غير قابلة للاشتقاق في تلك النقطة.

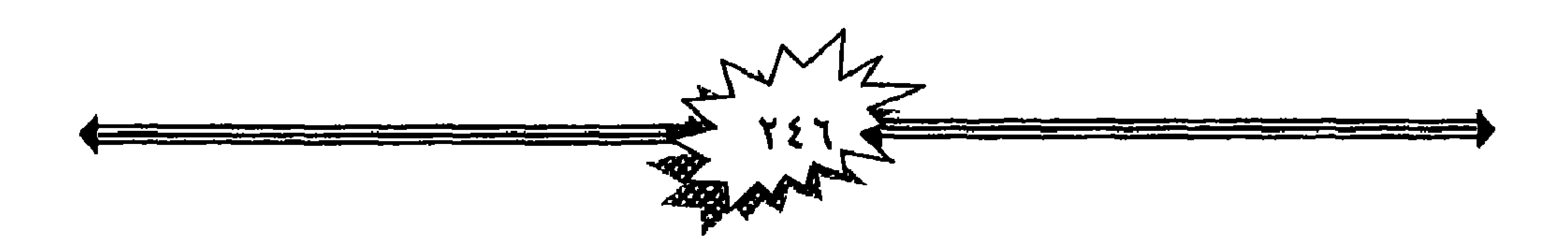
أنه من السهولة البرهنة أن الدالة ق.

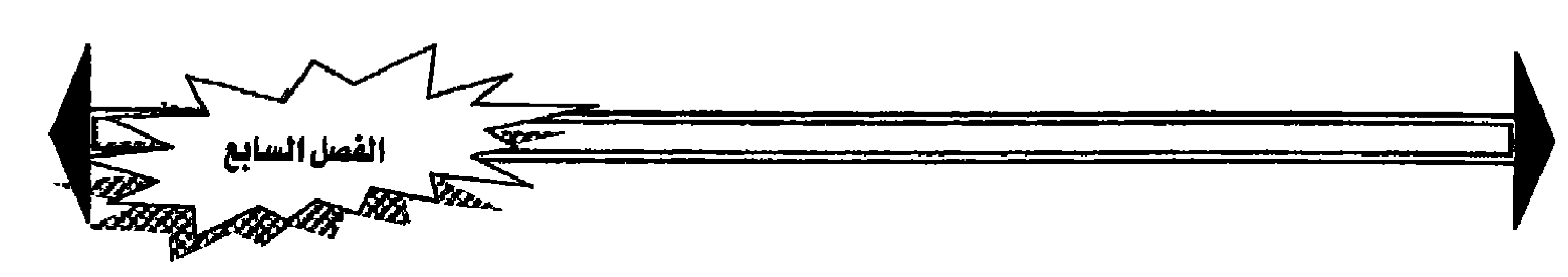
بحيث أن ق(س)= |س| مستمرة بالنقطة ٠

ولبرهنة القسم الثاني وهو أن دالة القيمة المطلقة غير قابلة للاشتقاق بالنقطة ٠ نقول، بما أن:

$$\frac{ق(س+\Delta س) - ق(س)}{\Delta س} = \frac{|0+\Delta س| - |0|}{\Delta س} = \frac{|\Delta س|}{\Delta س} = \begin{cases} +1 & \Delta س > 0 \\ -1 & \Delta س < 0 \end{cases}$$

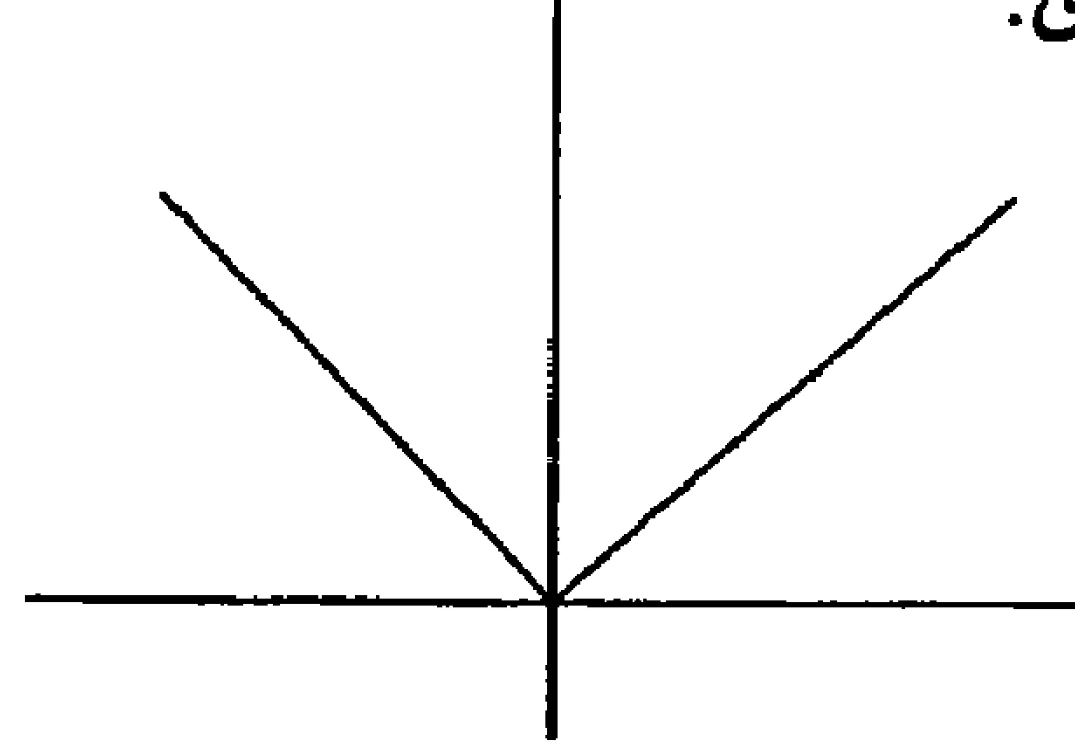
وهذا يعني أن الغاية غير موجودة. أي أن النسبة لا تقترب من غاية عندما تقترب Δس من الصفر وهذا يبين أن الدالة ق.





بحيث أن ق(س)= |س| غير قابلة الاشتقاق بالنقطة.

وبكلام آخر فإنه ليس المخطط الدالة ق.



بحيث أن ق(س)= |س| مماساً في نقطة الأصل.

إن ما يميز الدالة قابلة الاشتقاق عن الدالة المستمرة فقط، هي أن كل نقطة من نقاط مخطط الدالة قابلة الاشتقاق في $س_٠$، فإن $قَ(س_٠)$ هو ميل المستقيم المماس بالنقطة ($س_٠$، $ق(س_٠)$) هي:

$$\frac{ص - ق(س_٠)}{س - س_٠} = قَ(س)$$

أو

$ص = ق(س_٠) + قَ(س_٠)\ (س - س_٠)$

فلو أخذنا الدالة ك بحيث أن $ك(س) = ق(س_٠) + قَ(س_٠)\ (س - س_٠)$

فإن مخططها سوف ينطبق مع المستقيم المماس لمنحنى الدالة ق بالنقطة ($س_٠$، $ق(س_٠)$)

ولما كان $ق(س_٠) = ك(س_٠)$

فإن استمرارية ق يتضمن أن $\lim_{س \to س_٠} (ق(س) - ك(س)) = ٠$



وعندما تكون ق قابلة الاشتقاق في $س_٠$، يكون لدينا:

$$\underset{س \to س_٠}{نها} \frac{(ق(س) - ك(س))}{س - س_٠} = ٠$$

مثال (٢):

جد معادلة المماس لمنحنى الدالة ق

بحيث أن قَ(س)= ٣$س_٢$ فإن قَ(١)= ٣

وعندما س= ١ فإن ق(١)= ١ أي أن نقطة التماس هي (١، ١) ومعادلة المماس هي:

$$\frac{ص - ١}{س - ١} = ٣$$

أو ص= ٣س-٢

تمارين

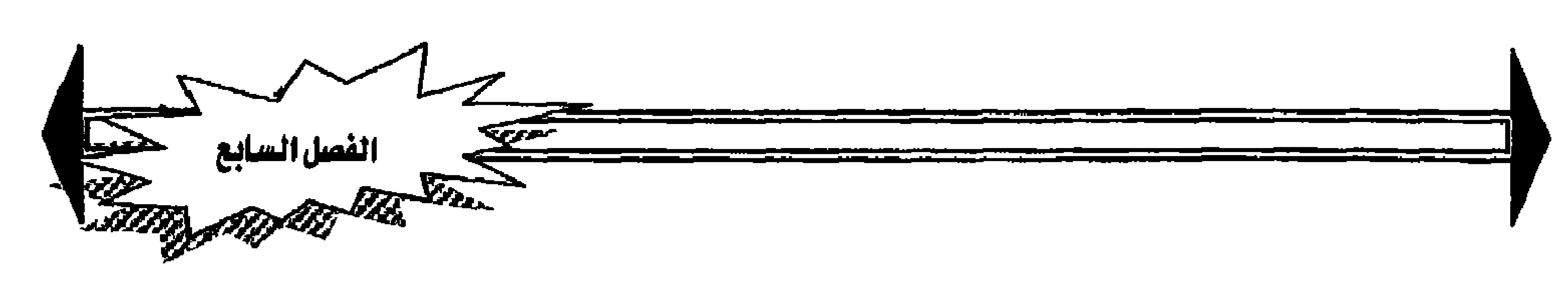
١- اذكر منطلق الدالة ق، ثم جد قَ(س) في كل مما يلي:

أ- $ق(س) = \frac{س}{س + ١}$ ب- $ق(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - ٤س + ٣}$

٢- لتكن ق دالة قابلة الاشتقاق بالنقطة $س_٠$، أي من الغايات يجب أن يكون موجوداً، وأي منها غير موجود.

أ- $\underset{\Delta س \to ٠}{نها} ق(س_٠ + \Delta س^٢) - ق(س_٠)$

ب- $\underset{\Delta س \to ٠}{نها} \frac{ق(س_٠ + \Delta س) - ق(س_٠)}{\Delta س^٢}$



جـ- $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{ق(س_0 - \Delta س) - ق(س_0)}{\Delta س}$

٣- إذا كانت ق قابلة الاشتقاق بالنقطة س، فإن:

$\lim_{س \to س_0} \frac{ق(س) - ك(س)}{س - س_0} = 0$

حيث أن ك(س)= ق($س_0$) + قَ($س_0$) (س−$س_0$)

٤- جد معادلة المماس لكل من المنحنيات التالية بالنقاط المبينة إزاءها:

أ) ق(س)= $س^5$، س= ٢

ب) ق(س)= م س + ب ، س = $س_0$

جـ) ق(س)= ٣$س^2$ + ٥ ، س= ٣

د) ق(س)= $\frac{س+1}{س^2+4س+3}$ ، س=١

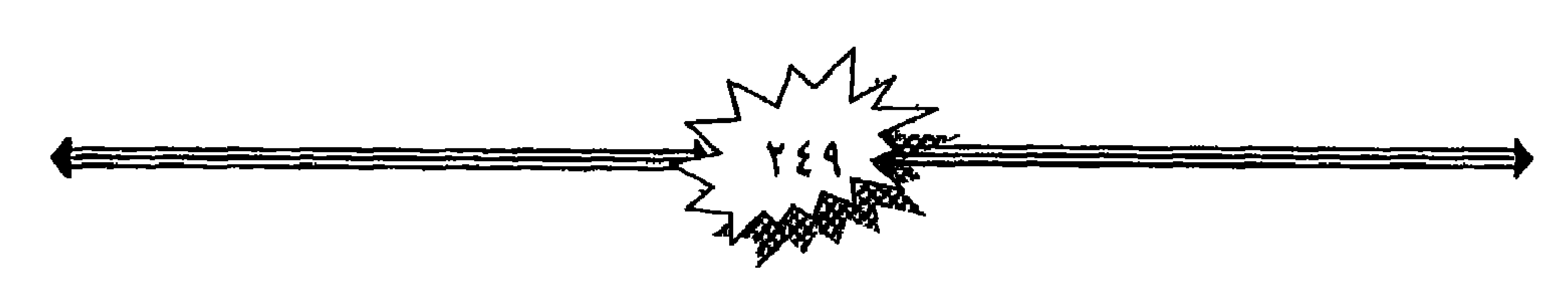
قوانين الاشتقاق:

سنتعرف في هذا البند على اشتقاق مجموع دالتين وضربهما وكذلك اشتقاق قسمة دالتين، حيث نعمم هذه النظريات لإيجاد اشتقاق الدوال الجبرية بأنواعها:

نظرية:

لتكن كل من ق و ك دالة قابلة الاشتقاق في س، فإن الدالة ق + ك قابلة الاشتقاق في س، ومشتقتها هي:

(ق + ك)َ (س) = قَ(س) + كَ(س)





أي أن $\frac{د(ق(س)+ك(س))}{د س} = \frac{د ق(س)}{د س} + \frac{د ك(س)}{د س}$

البرهان:

$$= \frac{(ق+ك)(س+\Delta س)-(ق+ك)(س)}{\Delta س}$$

$$= \frac{ق(س+\Delta س)+ك(س+\Delta س)-ق(س)-ك(س)}{\Delta س}$$

$$= \frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س} + \frac{ك(س+\Delta س)-ك(س)}{\Delta س}$$

وبما أن كل من ق و ك قابلة الاشتقاق في س، فإن:

$$\underset{\Delta س \leftarrow 0}{نها} \frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س} = قَ(س)$$

$$\underset{\Delta س \leftarrow 0}{نها} \frac{ك(س+\Delta س)-ك(س)}{\Delta س} = كَ(س)$$

وعلى هذا يكون لدينا:

$$(ق+ك)'(س) = \underset{\Delta س \leftarrow 0}{نها} \frac{(ق+ص)(س+\Delta س)-(ق+ك)(س)}{\Delta س}$$

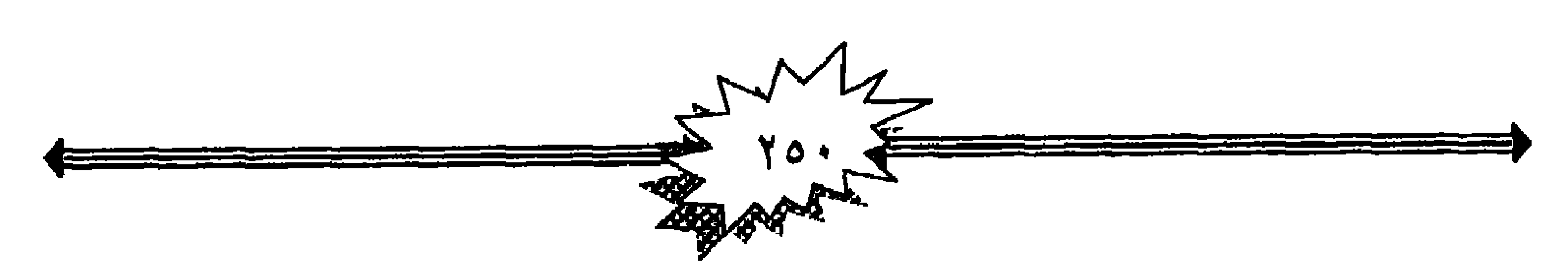
$$= قَ(س) + كَ(س)$$

نتيجة: ليكن كل من الدوال $ق_1$...... و $ق_ن$ قابلة الاشتقاق في س. فإن:

الدالة $ق_1 + ق_2 + ... +$ فإن قابلة الاشتقاق في س أيضاً.

ومشتقتها هي:

$$(ق_1 + ... + ق_ن)'(س) = قَ_1(س) + ... قَ_ن(س)$$



مثال (١):

جد مشتقة الدالة ق بحيث أن ق(س)= س^{٢} − ٤س + ٣

نفرض أن ق$_{١}$(س)= س^{٢}، ق$_{٢}$(س)= −٤س+٣

وبما أن قَ$_{١}$(س)= ٢س ، قَ$_{٢}$(س)= −٤

فإن قَ(س)= (ق$_{١}$+ق$_{٢}$)َ (س)= قَ$_{١}$(س) + قَ$_{٢}$(س)

= ٢س − ٤

مثال (٢): إن مشتقة الدالة ق بحيث أن ق(س)= س^{١٧} − ٧س^{٣} + ٣س

هي قَ(س)= ١٧س^{١٦} − ٢١س^{٢} + ٣

نظرية: لتكن كل من ق و ك دالة قابلة الاشتقاق في س، فإن الدالة ق ك قابلة الاشتقاق في س. ومشتقتها هي:

(ق ك)َ (س)= ك(س) قَ(س) + ق(س) كَ(س)

أي أن $\frac{\text{د}\left(\text{ق(س) ك(س)}\right)}{\text{د س}} = \text{ك(س)}\frac{\text{د ق(س)}}{\text{د س}} + \text{ق(س)}\frac{\text{د ك(س)}}{\text{د س}}$

البرهان:

$$\frac{\text{(ق ك)(س}+\Delta\text{س)} - \text{(ق ك)(س)}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق(س}+\Delta\text{س) ك(س}+\Delta\text{س)} - \text{ق(س) ك(س)}}{\Delta\text{س}}$$

وبإضافة وطرق ق(س) ك(س + Δس)، يكون لدينا:

$$= \frac{\text{ق(س}+\Delta\text{س) ك(س}+\Delta\text{س)} - \text{ق(س) ك(س}+\Delta\text{س)} + \text{ق(س) ك(س}+\Delta\text{س)} - \text{ق(س) ك(س)}}{\Delta\text{س}}$$

$$= ك(س+\Delta س)\frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}+ق(س)\frac{ك(س+\Delta س)-ك(س)}{\Delta س}$$

وبما أن كل من ق و ك قابلة للاشتقاق، في س فإن:

$$قَ(س)= \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}$$

$$كَ(س)= \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ك(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}$$

وأن $ك(س)= \lim_{\Delta س \to ٠} ك(س+\Delta س)$

فإن:

$$(ق ك)َ(س)= \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{(ق ك)(س+\Delta س)-(ق ك)(س)}{\Delta س}$$

= ك (س) قَ (س)+ ق (س) كَ(س)

نتيجة: ليكن كل من ق و ك و هـ دالة قابلة الاشتقاق في س، فإن:

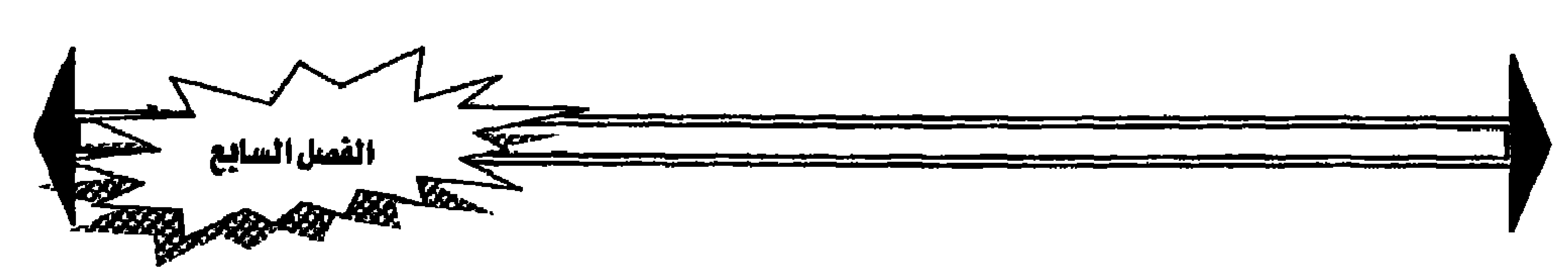
(ق ك هـ)َ (س)= ك(س) هـ(س) قَ(س) + ق(س) هـ(س) كَ(س) + ق(س) ك(س) هـَ(س)

نتيجة:

لتكن ق دالة قابلة الاشتقاق في س، وليكن جـ عدداً ثابتاً، فإن:

(جـ ق)َ (س)= جـ قَ(س)

أي أن $\frac{د(جـ ق(س))}{د س}=جـ\frac{د(ق(س))}{د س}$



البرهان: $\frac{د(جـ ق(س))}{دس} = جـ \frac{د(جـ(س))}{دس} + ق(س) \frac{دجـ}{دس} = جـ \frac{د(ق(س))}{دس} + ٠$

نتيجة: ليكن كل من ق و ك دالة قابلة للاشتقاق في س، فإن الدالة ق-ك قابلة للاشتقاق في س. ومشتقتها هي:

$$(ق - ك)'(س) = ق'(س) - ك'(س)$$

أي أن $\frac{د(ق - ك)(س)}{دس} = \frac{دق(س)}{دس} - \frac{دك(س)}{دس}$

نظرية:

ليكن كل من ق و ك دالة قابلة الاشتقاق في س، بحيث أن ك(س) $\neq$ ٠

فإن الدالة ق/ ك قابلة الاشتقاق، ومشتقتها هي:

$$(ق / ك)'(س) \frac{ق'(س) ك(س) - ق(س)\ ك'(س)}{[ك(س)]^{٢}}$$

أي أن:

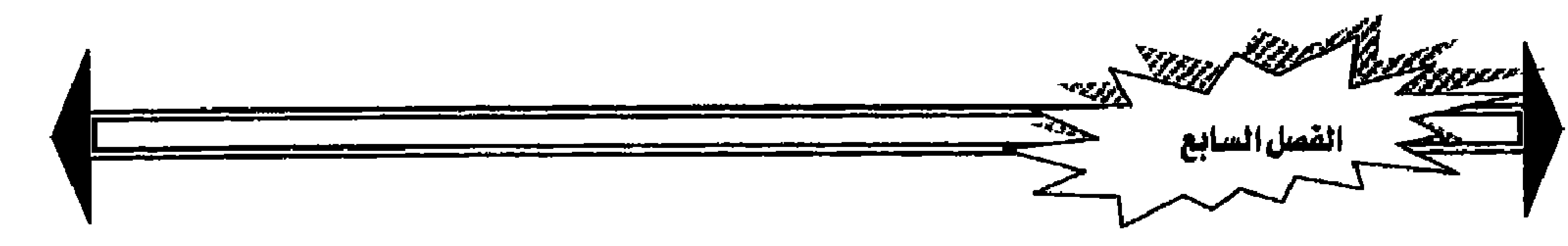
$$\frac{د(ق(س) / ك(س))}{دس} = \frac{ك(س) \frac{دك(س)}{دس} - ق(س) \frac{دك(س)}{دس}}{[ك(س)]^{٢}}$$

البرهان: $\frac{(ق / ك)(س + \Delta س) - (ق / ك)(س)}{\Delta س} = \frac{\frac{ق(س + \Delta س)}{ك(س + \Delta س)} - \frac{ق(س)}{ك(س)}}{\Delta س}$

$$= \frac{ك(س) ق(س + \Delta س) - ق(س) ك(س + \Delta س)}{\Delta س\ ك(س) ك(س + \Delta س)}$$

وبإضافة وطرح ق(س) ك(س) في البسط للجهة اليمنى لحصل على:





$$\frac{(ق/ك)(س+\Delta س)-(ق/ك)(س)}{\Delta س}=\frac{\frac{ك(س)ق(س+\Delta س)-ق(س)ك(س)}{\Delta س}-\frac{ق(س)ك(س+\Delta س)-ق(س)ك(س)}{\Delta س}}{ك(س)ك(س+\Delta س)}$$

$$=\frac{ك(س)\frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}-ق(س)\frac{ك(س+\Delta س)-ك(س)}{\Delta س}}{ك(س)ك(س+\Delta س)}$$

$$\frac{ك(س)\frac{ق(س+\Delta س)-ق(س)}{\Delta س}-ق(س)\frac{ك(س+\Delta س)-ك(س)}{\Delta س}}{ك(س)ك(س+\Delta س)}$$

وبما أن كل من ق و ك قابلة الاشتقاق، فإن:

$$(ق/ك)'(س)=\underset{\Delta س\to ٠}{نها}\frac{(ق/ك)(س+\Delta س)-(ق/ك)(س)}{\Delta س}$$

$$=\frac{ك(س)\ ق'(س)-ق(س)\ ك'(س)}{[ك(س)]^{٢}}$$

نظرية: لتكن ك دالة قابلة الاشتقاق في س بحيث أن ك(س) $\neq$ ٠

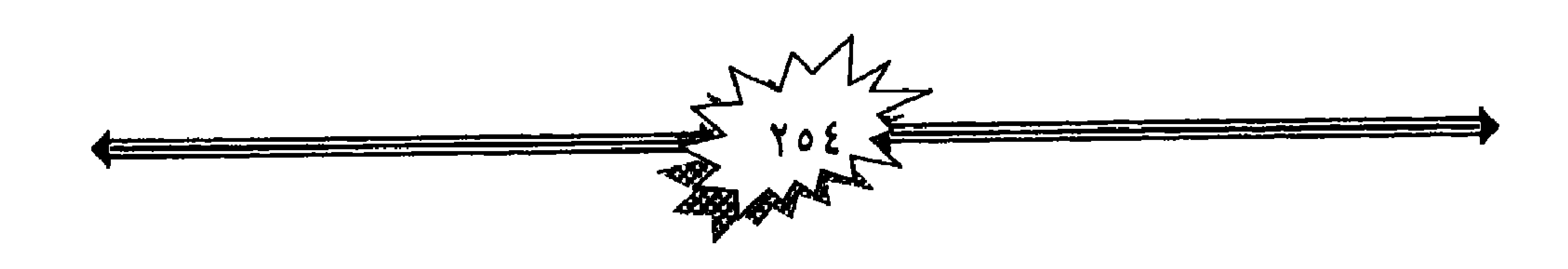
فإن الدالة $\frac{١}{ك}$ قابلة الاشتقاق في س، ومشتقتها هي:

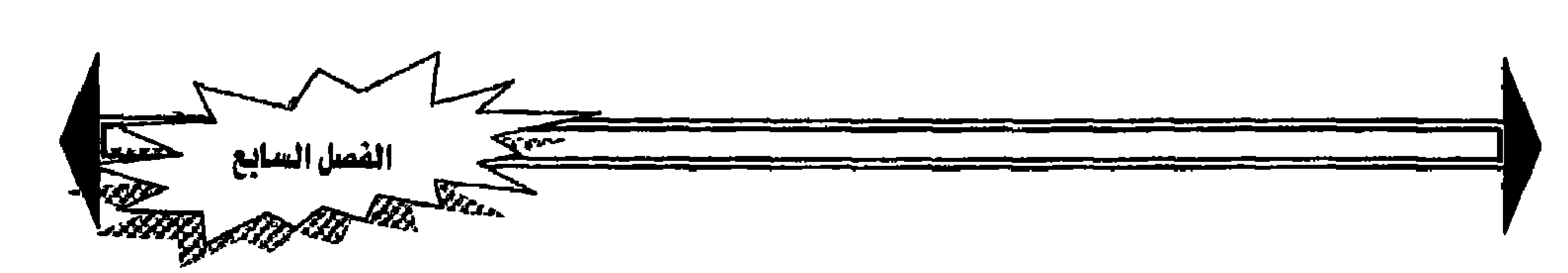
$$(١/ك)'(س)=\frac{-\ ك'(س)}{[ك(س)]^{٢}}$$

البرهان:

نفرض أن الدالة ق بحيث أن ق(س)= ١ ومن ثم نستخدم نظرية سابقة.

مثال (٤): جد مشتقة الدالة ق بحيث أن $ق(س)=\frac{س^{٣}+٣س^{٢}+٢}{س^{٤}+١}$





$$\bar{ق}(س)=\frac{(س^{٤}+١)(٣س^{٢}+٦س)-(س^{٣}+٣س^{٢}+٢)(٤س^{٣})}{(س^{٤}+١)^{٢}}$$

$$=\frac{-س(س^{٥}+٦س^{٤}+س^{٢}-٣س-٦)}{(س^{٤}+١)^{٢}}$$

لقد برهنا سابقاً أن $\frac{د(س^{ن})}{د س}=ن س^{ن-١}$ عندما يكون ن عدد صحيح غير سالب.

والآن يمكننا توسيع هذه النظرية لتشمل الأعداد السالبة الصحيحة.

نتيجة: لأي عدد صحيح ن، فإن $\frac{د(س^{ن})}{د س}=ن س^{ن-١}$

البرهان:

نحتاج للحالة التي فيها ن < ٠ فقط. أي أن −ن > ٠ بحيث أن:

$$\frac{د(س^{-ن})}{د س}=ن س^{-ن-١}$$

مع نتيجة سابقة نحصل أن $\frac{د(س^{ن})}{د س}=\frac{د\left(\frac{١}{س^{-ن}}\right)}{د س}=-\frac{(-ن س^{-ن-١})}{س^{-٢ن}}$

$$= ن س^{(-ن-١+٢ن)} = ن س^{ن-١}$$



تمارين

جد مشتقة كل من الدوال التالية:

١- ص = س^{٢} − ٤س + ٣

٢- ص = ٢س^{٣} − ٥س^{٢} + ٤س + ٣

٣- ص = ٣ + ٤س − س^{٢}

٤- ص = (٢س + ٣)^{٢}

٥- ص = س^{٤} − ٢س^{٣} + س^{٣} − ٣

٦- ص = ٥س^{٣} − ٣س^{٥}

٧- ص = $\frac{١}{\text{س}}$

٨- ص = $\frac{١}{٤}$س^{٤} − $\frac{١}{٣}$س^{٣} + $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ٣

٩- ص = ٣س^{٤} − ٧س^{٣} + ٢س^{٢}

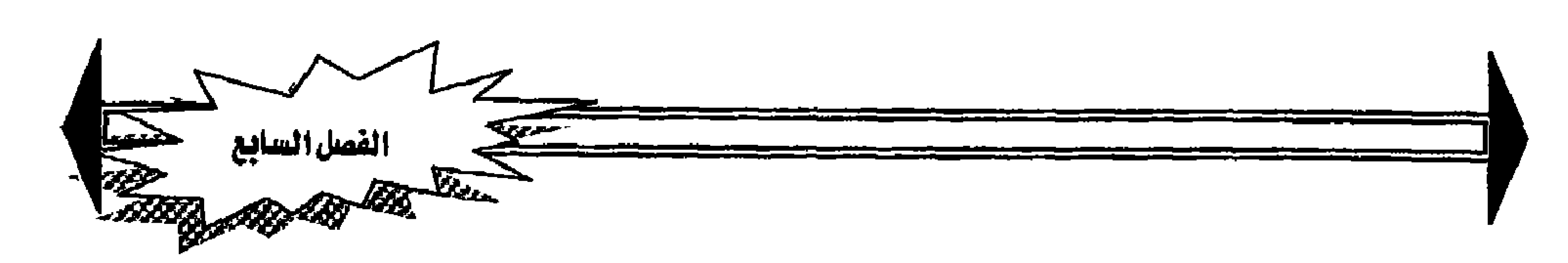
١٠- ص = (س^{٢} + ١) (س^{٣} − ١)

١١- ص = (س−٢) (س+٣)

١٢- ص = (٣س − ١) (٢س+٥)

١٣- ص = (س−١)^{٢} (س+٢)

١٤- ص = $\frac{٢\text{س} + ٥}{٣\text{س} - ٢}$



١٥- $ص = \frac{٢س+١}{س^{٢}-١}$

١٦- $ص = س^{٣}(س+١)^{-١}$

١٧- $ص = (س+س^{-١})^{٢}$

١٨- $ص = \left(\frac{س+١}{س-١}\right)^{٢}$

١٩- للتمارين ١-٨، و ١١-١٥. ناقش الفترات التي تكون فيها الدوال متزايدة ومتناقصة، ومن ثم حدد نقاط النهايات.

المشتقات العالية Higher – Order Derivatives

إن المشتقة قَ للدالة الحقيقية ق هي دالة حقيقية أيضاً. فإذا كانت قَ دالة قابلة الاشتقاق بالنقطة س، فيرمز لمشتقتها بالرمز قً حيث أن قيمتها بالنقطة س هي:

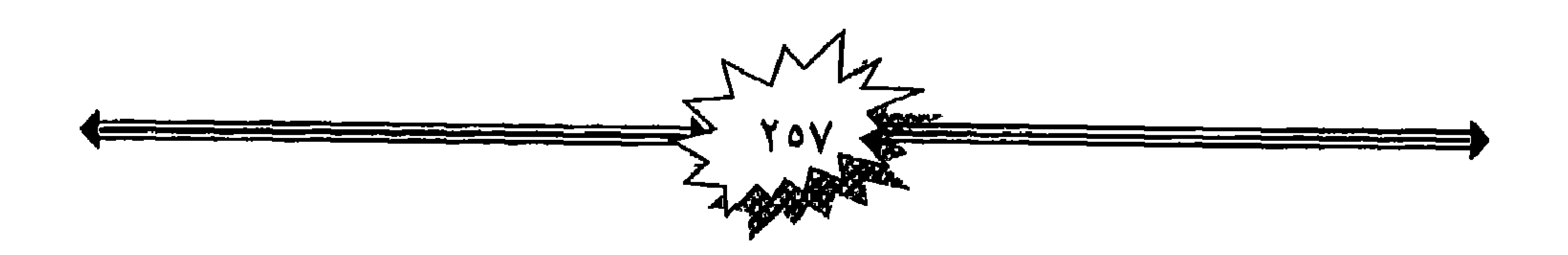
$$قً(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{قَ(س+\Delta س) - قَ(س)}{\Delta س}$$ وتسمى قً المشتقة الثانية للدالة ق.

يمكن كتابة المشتقة الثانية قً(س) بالشكل $\frac{د^{٢}(ق(س))}{د س^{٢}}$

فمثلاً، إذا كان ق(س) = $س^{٣}$

فإن $قً(س) = \frac{د^{٢} ق(س)}{د س^{٢}} = ٦س$

فإذا استمرينا بإيجاد اشتقاق الدالة ق، إلى ن من المرات، فإن المشتقة هي



ق$^{(ن)}$(س) أو $\frac{د^ن ق(س)}{د س^ن}$

مثال (٣):

جد المشتقات الثلاث للدالة ق بحيث أن ق(س)= س^٤ + ٣س^٣ + ٢

قَ(س)= ٤س^٣ + ٩س

قً(س)= ١٢س^٢ + ١٨س

قً(س)= ٢٤س + ١٨

تمارين

جد المشتقات الثانية والثالثة لكل من الدوال التالية:

١- ص= ٥س^٢ – ٤س + ٣

٢- ص= ٢س^٣ – ٥س^٢+٤س+٣

٣- ص= (٢س + ٣)^٢

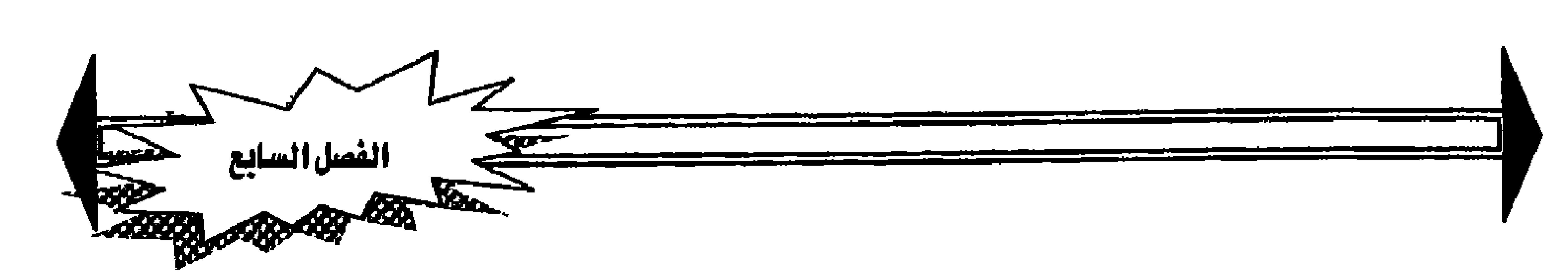
٤- ص= ٥س^٣ – ٣س^٥

٥- ص= $\frac{١}{س}$

٦- ص= $\frac{١}{٤}$س^٤ – $\frac{١}{٣}$س^٣ + $\frac{١}{٢}$س^٢ – س+٣

٧- ص= (س–٢) (س+٣)

٨- ص= س^٢(س^٣–١)



٩- $ص = \frac{٢س + ٥}{٣س - ٢}$

١٠- $ص = \frac{س}{س + ١}$

القانون المتسلسل The chain rule

سوف ندرس في هذا البند اشتقاق الدوال المركبة. فمثلاً يمكن اشتقاق الدالة ق بحيث أن $ق(س) = ((س^{٢} + ٥س) - ٣)^{٢٠}$ بإيجاد المفكوك أولاً والحصول بمتعددة الحدود من الدرجة ٤٠ ومن ثم إيجاد الاشتقاق لمتعدد الحدود. من الملاحظ أن هذه الطريقة طويلة ومملة واحتمال وجود الخطأ فيها كبير.

من الممكن كتابة الدالة السابقة بالشكل $ق(س) = ع^{٢٠}$ و $ع = س^{٢} + ٥س - ٣$

إن إيجاد اشتقاق الدالة المركبة يكون بسيطاً بواسطة النتيجة المهمة التالية:

نظرية: (القانون المتسلسل)

لتكن ك دالة قابلة الاشتقاق في س و ق دالة قابلة الاشتقاق في ك(س) فإن الدالة المركبة ق ○ ك قابلة الاشتقاق في س ومشتقتها هي:

$(ق \circ ك)'(س) = ق'(ك(س))\ (ك'(س))$

يمكن كتابة النظرية السابقة بصورة مبسطة.

فإذا كان ص= ق دس و ع= ك(ص) فإن س= (ك ○ ق) (س) و

$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} . \frac{دص}{دس}$



مثال (١): جد مشتقة ع= (س^{٢} + ٧س + ٣)^{١٠} − ٦٠

يمكن أن نكتب الدالة السابقة بشكل ص= س^{٢} + ٧س + ٣ و ع= ص^{١٠}− ٦٠

$$\frac{\text{د}\left[\left(\text{س}^{٣}+٧\text{س}+٣\right)^{١٠}-٦٠\right]}{\text{دس}}=\frac{\text{د}\left(\text{ص}^{١٠}-٦\right)}{\text{دص}}\cdot\frac{\text{د}\left(\text{س}^{٢}+٧\text{س}+٣\right)}{\text{دص}}$$

= ١٠ص^{٩} (٢س + ٧)

= ١٠(س^{٢} + ٧س + ٣)^{٩} (٢س + ٧)

إنه من الممكن تعميم المثال السابق ونبين إذا كانت ك دالة قابلة الاشتقاق و ن عدد صحيح، بحيث أن:

ق(س)= (ك(س))^{ن}

فإن قَ(س)= ن[ك(س)]$^{ن-١}$ كَ(س)

وذلك، فإذا كانت ق= ل ○ ك

بحيث أن ل(س)= س^{ن} فإن لَ(س)= ن س$^{ن-١}$

وأن قَ(س)= لَ(ك(س)) كَ(س)

= ن[ك(س)]$^{ن-١}$ كَ(س)

وإذا كان

م= ك(س)

فإن كَ(س)= $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$

فإن:

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{م}^{\text{ن}})=\text{ن م}^{\text{ن}-1}\frac{\text{د م}}{\text{د س}}$$

مثال (٢): لتكن ق دالة بحيث أن م(س)= (س^{٣}+١)^{٣}، فلإيجاد قَ(س)

نفرض ع= س^{٣}+١

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}=\text{٢س}\text{، ق(س)= ع}^{٣}$$

$$\text{قَ(س)}=\text{٣ع}^{٢}\,\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}=\text{٣(س}^{٢}\text{+١)}^{٢}\text{.٢س}\quad\text{٦س(س}^{٢}\text{+١)}^{٢}$$

مثال (٣):

جد مشتقة الدالة ق بحيث أن $\text{ق(س)}=\left(\text{س}+\frac{١}{\text{س}}\right)^{-٣}$

$$\text{قَ(س)}=-٣\left(\text{س}+\frac{١}{\text{س}}\right)^{-٤}\left(١-\frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)$$

تمارين

جد مشتقة كل مما يأتي:

١- ق(س)= (س−س^{٢}−س^{٥})^{٤}

٢- ق(س)= (٣س^{٢}+٢س−١)^{١٠٠}

٣- ق(س)= (١−٢س)^{٥}

٤- ق(س)= (١−٢س)$^{-١}$

٥- $ق(س) = س - \frac{١}{س}$

٦- $ق(س) = \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢}$

٧- $ق(س) = (س^{٥} - س^{١٠})^{٢٠}$

٨- $ق(س) = \left(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٣}$

٩- $ق(س) = \frac{١}{(١ + س)^{٤}}$

١٠- $ق(س) = \left(\frac{أس + ب}{جـس + د}\right)^{-٣}$

١١- $ق(س) = \left(\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + س\right)^{-١}$

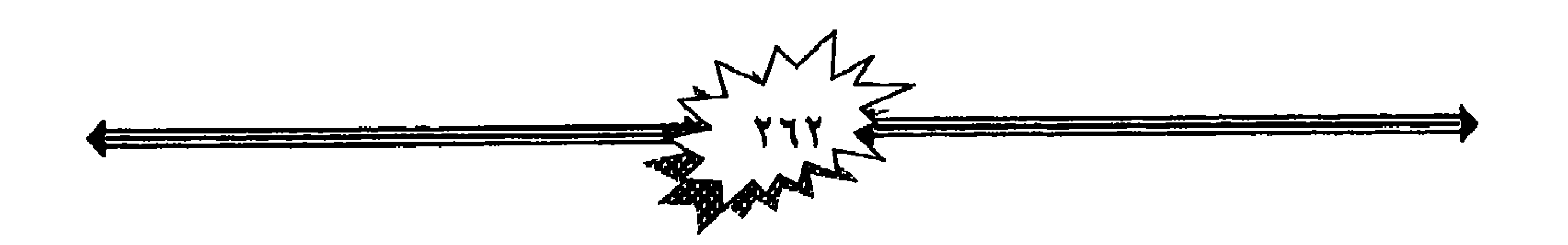
١٢- $ق(س) = \left(\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{س - ٢}\right)^{٣}$

الدوال الضمنية Implicit Functions

إن جميع الدوال التي تعاملنا فيها لحد الآن هي من شكل ص= ق(س) التي يمكن فيها التعبير عن ص بدلالة س بصورة واضحة. أنه من الغالب أن نصادف معادلات من شكل:

$س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٣$، و $ص^{٢} = س$، $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

حيث لا يمكن التعبير فيها عن ص بدلالة س بصورة واضحة. وذلك عند تعويض في عدد لمنطلق س.



نحصل على قيمة واحدة إلى ص أو أكثر. وفي هذه الحالة نقول أن ص دالة ضمنية إلى س أو أكثر.

في الحقيقة إنه يمكن حل كل من المعادلات السابقة والحصول على ص بدلالة س، إلا أن هذا لا يتم دائماً إذ توجد بعض المعادلات التي يكون فيها من المتعذر إيجاد ص بدلالة س مثل:

$$س^{٥} + ٤س\,ص^{٣} - ٣ص^{٥} = ٢$$

إلا أننا نريد استخراج $\frac{دص}{دس}$ في هذه المعادلة.

تسمى طريقة إيجاد $\frac{دص}{دس}$ لهذه المعادلة بالاشتقاق الضمني. حيث تعامل ص كدالة قابلة الاشتقاق بدلالة س. بعد أن نستخدم قوانين الاشتقاق السابقة.

مثال (١):

جد $\frac{دص}{دس}$ في المعادلة $س^{٥} + ٤س\,ص^{٣} - ٣ص^{٥}$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س نحصل على:

$$\frac{د}{دس}(س^{٥}) + \frac{دص}{دس}(٤س\,ص^{٣}) - \frac{د}{دس}(٣ص^{٥}) = \frac{د}{دس}(٢)$$

$$٥س^{٤} + ٤\left(س\frac{د(ص^{٣})}{دس} + ص^{٣}\frac{دس}{دس}\right) - ١٥ص^{٤}\frac{دص}{دس} = ٠$$

$$٥س^{٤} + ٤\left(٣س\,ص^{٢}\frac{دص}{دس} + ص^{٣}\right) - ١٥ص^{٤}\frac{دص}{دس} =$$



$$-(١٢س ص^{٢}-١٥ص^{٤})\frac{دص}{دس}=-(٥س^{٤}+٤ص^{٣})$$

فعندما يكون $١٢س ص^{٢}-١٥ص^{٤}\neq$ فإن:

$$\frac{دص}{دس}=\frac{٥س^{٤}+٤ص^{٣}}{١٥ص^{٤}-١٢س ص^{٢}}$$

مع ملاحظة، أن القانون $\frac{د}{دس}ع^{ن}=ن ع^{ن-١}\frac{دع}{دس}$

يصبح $\frac{دص^{٥}}{دس}=٥ص^{٤}\frac{دص}{دس}$

مثال (٥): جد ميل مماس المنحنى $س^{٣}+س ص+ص^{٢}=٧$ بالنقطة (١، ٢).

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س نحصل على:

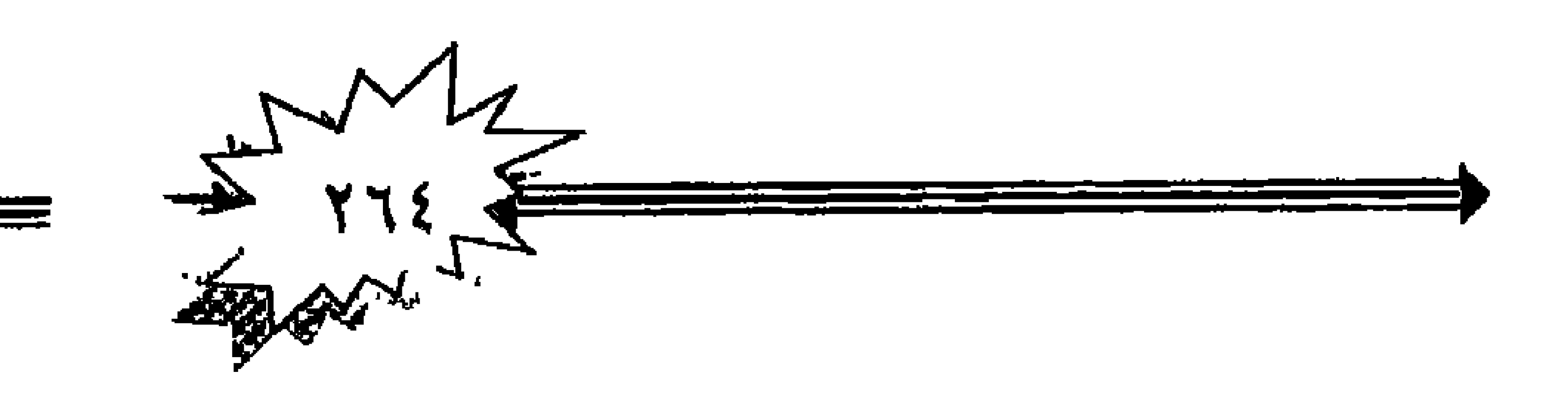
$$٢س\frac{دس}{دس}\left(س\frac{دص}{دس}+ص\frac{دس}{دس}\right)+٢ص\frac{دص}{دس}=٠$$

$$(س+٢ص)\frac{دص}{دس}=-(٢س+ص)$$

وفي حالة $س+٢ص\neq$، **نحصل أن:** $\frac{دص}{دس}=\frac{-(٢س+ص)}{س+٢ص}$

وفي النقطة (١، ٢) يكون لدينا $\left(\frac{دص}{دس}\right)(١،٢)=\frac{-٤}{٥}$

نظرية: لتكن ق دالة بحيث أن ق(س)= $س^{ن/ك}$ حيث أن كل من ن و ك عدد صحيح، فإن $قَ(س)=\frac{ن}{ك}س^{ن/ك-١}$



البرهان:

لما كان $ص = س^{ن/ك}$ فإن $ص^{ك} = س^{ن}$

وباشتقاق الطرفين نحصل على:

$$ك ص^{ك-١} \frac{دص}{دس}$$

فإذا كان $ص \neq ٠$، فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{ن}{ك} \frac{س^{ن-١}}{ص^{ك-١}}$

$$= \frac{ن}{ك} ص^{١-ك} س^{ن-١}$$

$$= \frac{ن}{ك} \left(س^{ن/ك}\right)^{١-ك} س^{ن-١} = \frac{ن}{ك} س^{ن/ك-١}$$

مثال (٣):

جد مشتقة الدالة ق بحيث أن $ق(س) = \left(س^{٣} + ٣\right)^{\frac{٣}{٢}}$

$$ق'(س) = \frac{٣}{٢} \left(س^{٢} + ٣\right)^{\frac{١}{٢}} . ٢س$$

$$= ٣س \left(س^{٢} + ٣\right)^{\frac{١}{٢}}$$

تمارين:

جد $\frac{دص}{دس}$ لكل من المسائل ١ – ١٤:

١- $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ ٢- $ص = \left(\frac{س+١}{س-١}\right)^{\frac{١}{٢}}$

٣- $٢س ص - ص^{٢} = ١$

٤- $٣س^{٢} + س ص - ص^{٢} = ١$

٥- $ص^{٣} = ق(س)$

٦- $\frac{س^{٣}}{م^{٣}} + \frac{ص^{٢}}{٦^{٢}} = ١$

٧- $س ص - ص - ٢س - ٥ = ٠$

٨- $ص^{٢} = \frac{٤ + س}{٤ - س}$

٩- $س^{\frac{١}{٢}} + ص^{\frac{١}{٢}} = ١$

١٠- $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ١$

١١- $(س+ص)^{٢} + (س-ص)^{٢} = س^{٣} + ص^{٣}$

١٢- $س^{٣} + ص^{٣} = ٣م س ص$

١٣- $٤س^{٢}ص + ٢ص^{٣} = ١ + س ص^{٢}$

١٤- $س^{٤} - ٢ص^{٤} = س^{٢}ص^{٢} - ٦$

جد معادلة المماس لكل منحنى بالنقطة المبينة إزاءه:

١٥- $س^{٢} + س ص - ص^{٢} = ١$ (٢، ٣)

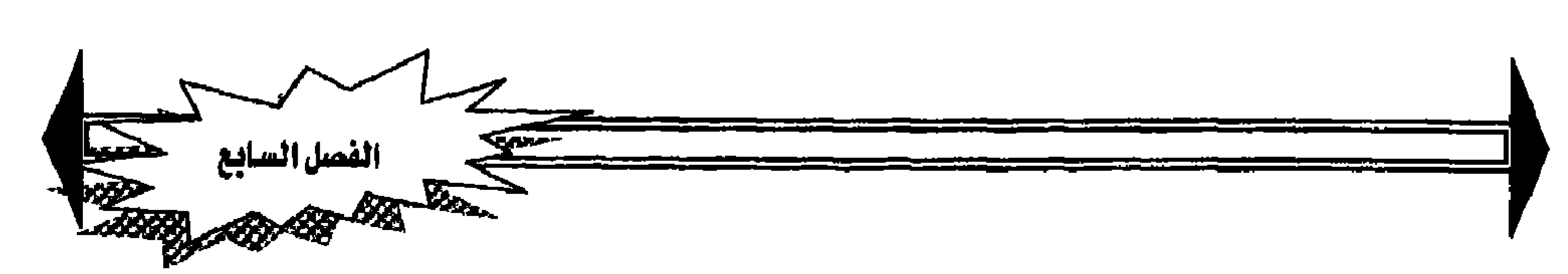
١٦- $\frac{س - ص}{س - ٢ص} = ٢$ (٣، ١)

١٧- $\sqrt[٣]{س ص - ٤ = ٠}$ (٨، ٨)

١٨- $س^{٢} + \frac{س - ص}{س + ص} = ٠$ (٢، ٣)

١٩- $س^{٢} + ص^{٣} + ص^{٢} = ١٠س$ (٨، -٤)

٢٠- $س^{٢}ص + ٤ص - ٤س = ٠$ (٢، ١)



٢١- برهن أن مماس المنحنى $\frac{س^2}{م^2}+\frac{ص^2}{ب^2}=1$ بالنقطة (س٠، ص٠)

عليه هو $\frac{س_٠ س}{م^2}+\frac{ص_٠ ص}{ب^2}=1$

السرعة والتعجيل Velocity and Accleration

إن من تطبيقات التفاضل المهمة هي إيجاد السرعة والتعجيل، حيث أنه إذا فرضنا أن جسماً يتحرك بخط مستقيم وبسرعة ما. فإنه يمكن تخطيط حركة الجسم من النقطة التي يبدأ فيها الجسم من النقطة.

أي عندما ز= ٠ ويرمز لمسافة الجسم المقطوعة بالحرف ف.

فإذا فرضنا أن ق هي دالة موقع الجسم بالنسبة للزمن ق بحيث أن ف= ق(ز)

وإذا كانت فترة الزمن هي [ز١، ز٢]. فإن معدل سرعة الجسم بهذه الفترة:

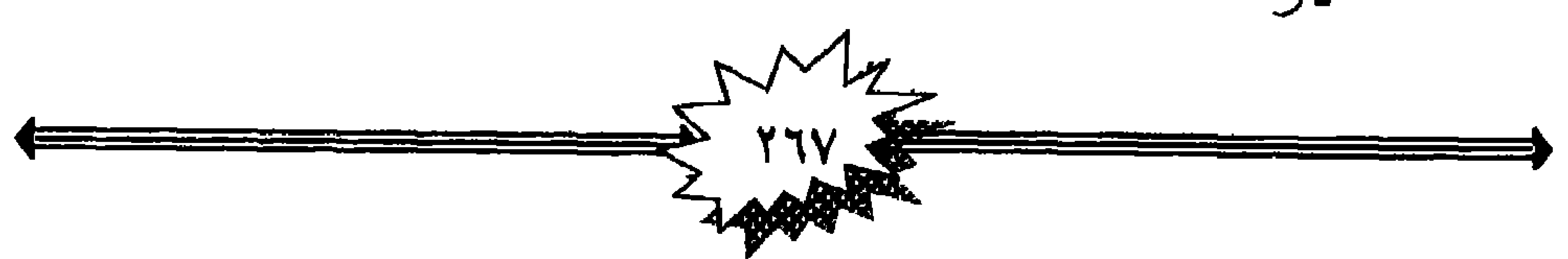
$$\text{معدل السرعة}=\frac{\Delta ف}{\Delta ز}=\frac{ق(ز_2)-ق(ز_1)}{ز_2-ز_1}$$

وتعرف السرعة الآنية أو السرعة في ز٠ بأنها غاية معدل السرعة خلال الفترة التي تشمل ز٠، عندما يقترب طول الفترة من الصفر.

وبما أن $\frac{\Delta ف}{\Delta ز}$ هي معدل السرعة، فإن السرعة في ز٠ هي $\left(\frac{د ف}{د ز}\right)\Big|_{ز=ز_٠}$

وعادة ما نرمز للسرعة بالرمز ع(ز) بحيث أن:

$$ع(ز)=\frac{د ف}{د ز}$$





$$ع(ز_٠) = \left.\frac{دف}{دز}\right|_{ز=ز_٠}$$

وبالمثل فإن:

$$معدل\ التعج = \frac{التغير\ في\ السرعة}{التغير\ في\ الزمن}$$

فإذا كانت ع(ز) هي دالة السرعة بالنسبة للزمن ففي الفترة من زه إلى زه + Δز

فإن معدل التعجيل يكون:

$$معدل\ التعجيل = \frac{ع(ز_٠ + \Delta ز) - ع(ز)}{\Delta ز}$$

وعندما يقترب Δز من الصفر، فنعرف التعجيل أ(ز) في زه فإنه:

$$أ(ز_٠) = \lim_{\Delta ز \to ٠} \frac{ع(ز_٠ + \Delta ز) - ع(ز_٠)}{\Delta ز} = \left.\frac{دص}{دز}\right|_{ز=ز_٠} = \left.\frac{د^٢ف}{دز^٢}\right|_{ز=ز_٠}$$

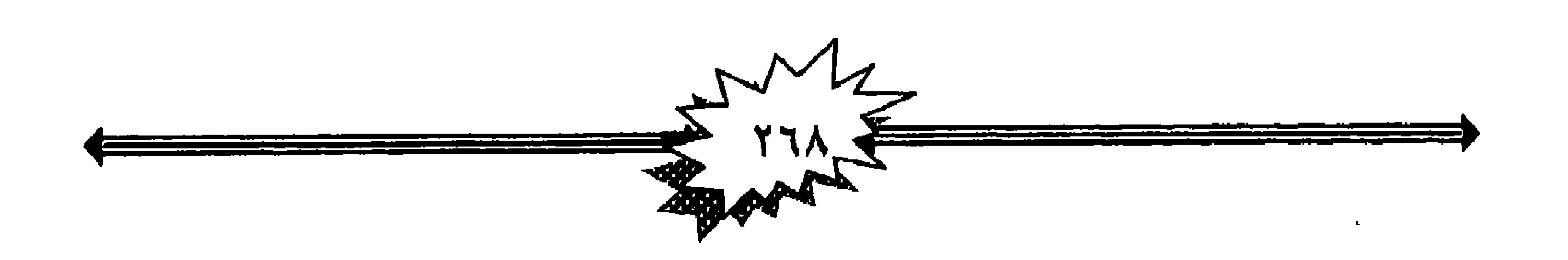
وعلى هذا فإن التعجيل في أي لحظة هو اشتقاق السرعة في تلك اللحظة، كما نرى أن التعجيل هو المشتقة الثانية للمسافة بالنسبة للزمن.

مثال (١):

إذا قذفت كرة من نقطة تبعد ٥ أقدام أعلى سطح الأرض، بسرعة ابتدائية قدرها ٢٠قدم/ ثانية. فإن ارتفاعها في أي لحظة هي:

$$ف(ز) = ٥ + ٢٠ز - ١٦ز^٢$$

حيث ف هي المسافة بالأقدام. ز بالثواني. جد السرعة والتعجيل.



ع(ز)= فَ(ز)= ٢٠-٣٢ز قدم/ ثانية

أ(ز)= عَ(ز)= فً(ت)= -٣٢ قدم/ ثانية

تمارين

١- جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث أن بعده من نقطة الأصل هي ق بعد ز ثانية. جد موقع الجسم وسرعته وتعجيله عندما ز= ٤ ثانية في:

(أ) ف= $ز^{٢}$ − ٦ز + ١٠

(ب) ف= $ز^{٣}$ − ل $ز^{٢}$ + ٢٤ز

(جـ) ف= $\sqrt{ز}$ − ٢$ز^{٢}$

(د) ف= ز + $\frac{١}{ز}$

٢- قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ١٠٨ قدم. وارتفعت بموجب القانون:

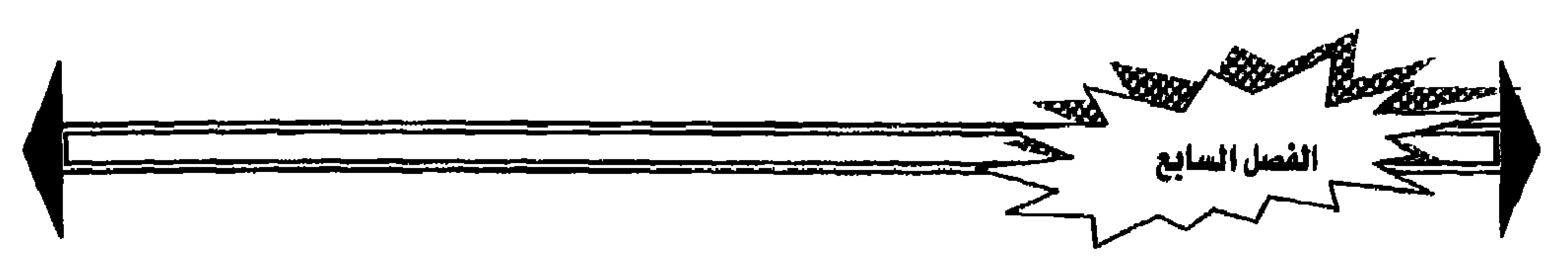
ف= ١٠٨ز − ١٦$ز^{٢}$

(أ) ما هي سرعة ارتفاعها بعد ٢ ثانية؟

(ب) بعد كم ثانية تبدأ الكرة بالسقوط؟

(جـ) ما هي سرعة الكرة عندما ترتطم بالارض؟

(د) ما هو تعجيل الكرة خلال هذه الرحلة؟



٣- جسم يتحرك بخط مستقيم بحيث أن بعده من نقطة ثابتة على المستقيم في نهاية ز ثانية هي:

ف = (٣٦ + ز^{٢}) (٢ز – ٢١)

جد المسافة، السرعة، والتعجيل بعد ٣ ثواني وأربع ثواني.

٤- جد السرعة ع=$\frac{دف}{دز}$، إذا كانت مسافة جسم متحرك في ز ثانية هي:

ف= ١٨٠ز –١٦ز^{٢} متى تنتهي سرعة هذا الجسم.

٥- إذا قذفت كرة عمودياً للأعلى بسرعة ٣٢ قدم/ ثانية، وأن ارتفاعه بعد ز ثانية معطى بالمعادلة:

ف = ٣٢ز – ١٦ز^{٢}

في أي وقت تصل الكرة لأعلى نقطة؟ وما هو هذا الارتفاع؟

التفاضلات دص ، دس Diffarantiales

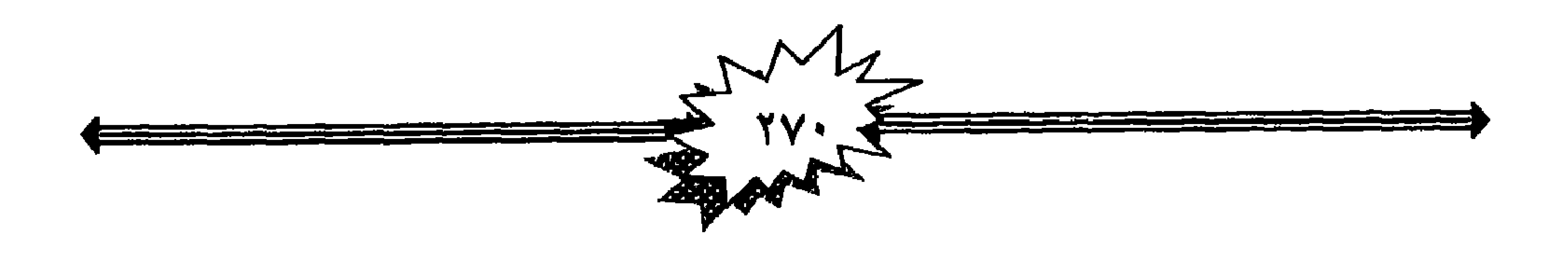
إذا كان ق(س)= ص

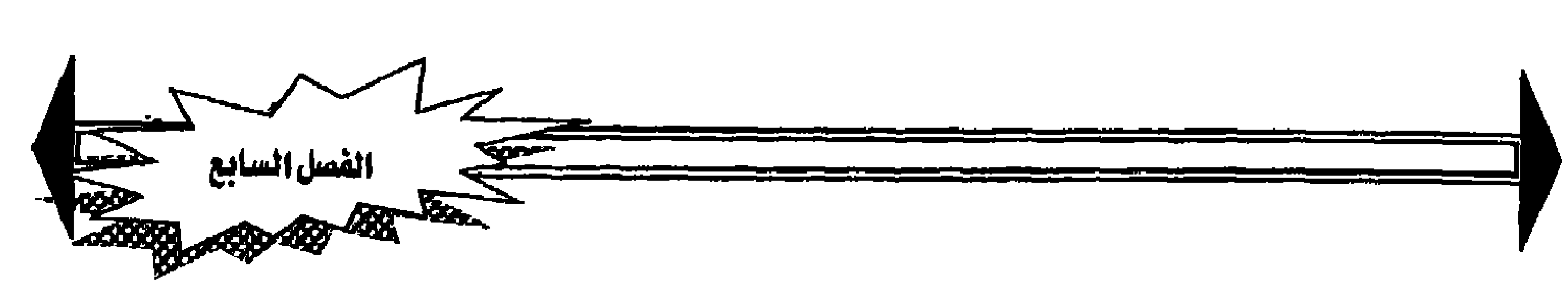
يسمى دس "بتفاضل س" حيث يمكن أن يكون دس أي عدد حقيقي، وأنه متغير مستقل منطلقه هو الأعداد الحقيقية.

ويسمى دص "بتفاضل ص" وهو دالة إلى س، دس ومعطى بالعلاقة:

دص= قَ(س) دس

.... (١)





للتفاضلات دس= دص الخصائص التالية:

١- إذا كان دص= ٠ فإن دس= ٠

٢- إذا كان دس ≠ ٠ فإن $\frac{ق َ(س) دس}{دس}$ = قَ(س)

ولذا هو مشتقة ص بدلالة س.

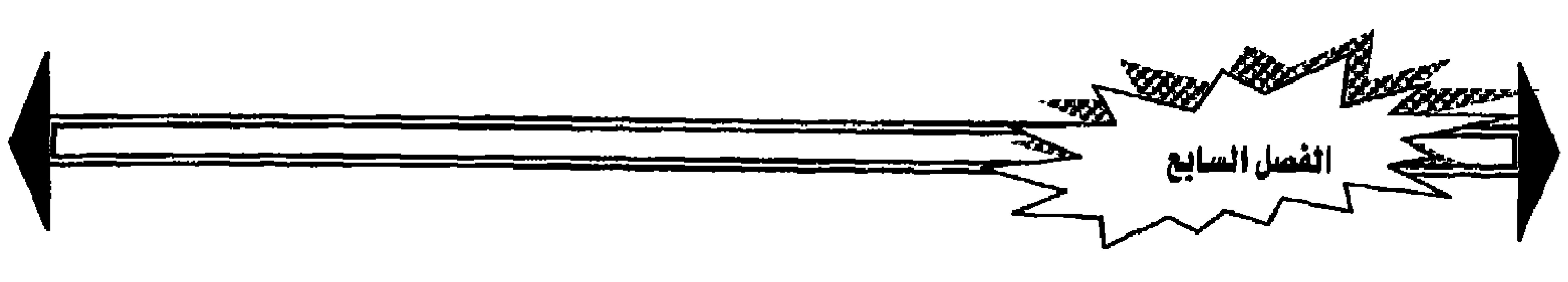
فمثلاً إذا كان ص= $س^{٣}$ = ق(س)

فإن قَ(س)= ٣$س^{٢}$

و دص= قَ(س) دس = ٣$س^{٢}$. دس

إذا فرضنا ل= ق(س)، ع= ك(س) فإنه من الممكن إعادة كتابة قوانين الاشتقاق السابقة بالطريقة التفاضلية التالية:

قوانين الاشتقاق	قوانين التفاضل
١- $\frac{دجـ}{دس}$=٠	دجـ= ٠
٢- $\frac{د(جـ ل)}{دس}$=جـ$\frac{د ل}{دس}$	د(جـ ل)= جـ دل
٣- $\frac{د(ل+ع)}{دس}$=$\frac{د ل}{دس}$+$\frac{د ع}{دس}$	د(ل+ع)= دل + دع
٤- $\frac{د(ل ع)}{دس}$=ل$\frac{د ع}{دس}$+ع$\frac{د ل}{دس}$	د(ل ع)= ل دع + ع دل
٥- $\frac{د\left(\frac{ل}{ع}\right)}{دس}$=$\frac{ع\frac{د ل}{دس}-ل\frac{د ع}{دس}}{ع^{٢}}$	ل د$\left(\frac{ع}{ع}\right)$=$\frac{د ل-ل د ع}{ع^{٢}}$



٦- $\frac{د(ل^ن)}{دس} = ن ل^{ن-١} \frac{دل}{دس}$ $د(ل^ن) = ن ل^{ن-١} دل$

٧- $\frac{د(جـ س^ن)}{دس} = جـ^ن س^{ن-١}$ $د(جـ س^ن) = جـ^ن س^{ن-١} . دس$

لبرهنة القانون ٣، إذا فرضنا أن ل= ق(س) فإن دل= قَ(س) دس

ع= ك(س) فإن دع= كَ(س) دس

فإن ل + ع= (ق+ك) (س)

و د(ل+ع)= (ق+ك)َ (س)

= (قَ(س) + كَ(س)) دس

= (قَ(س)دس + كَ(س))دس

= دل + دع

وبالمثل يتم اشتقاق القوانين الأخرى.

مثال (١):

إذا كان $ص= س^٣ + ٥س^٢ - ٧س + ٤$

وأن $\frac{دص}{دس} = (٣س^٢ + ١٠س - ٧)$

فإن $دص= (٣س^٢ + ١٠س - ٧) دس$

وبطريقة أخرى١٠ان=

$دص= د(س^٣ + ٥س^٢ - ٧س + ٤)$

$= د(س^٣) + د(٥س^٢) + د(-٧س) + (د(٤))$

= ٣س^{٢} دس + ١٠س دس − ٧س دس + ٠

= (٣س^{٢} + ١٠س − ٧) دس

تمارين

احسب تفاضلات الدوال من ١−٤

١− ص= ٣س^{٤}−س^{٣}+٧

٢− ص= ٦ $\sqrt{س}$ − ٥س^{٢}

٣− ص= س − $\frac{١}{س}$

٤− ص= (س$^{٢/٣}$ − ٢س$^{\frac{٢}{٣}}$)^{٢}

جد قيم التفاضلات التالية:

٥− د(س−س^{٣})

٦− د($\sqrt{١ - ٣س}$)

٧− د($\frac{أس}{\sqrt{أ - س}}$)

٨− د($\frac{س - أ}{س}$ $\sqrt{٢أس - س^{٢}}$)

جد دص فيما يأتي:

٩− ص= س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥س − ٧

١٠− ص^{٢}= (٣س^{٢}+١)$^{\frac{٣}{٢}}$

١١- س ص^{٢} + س^{٢} ص= ٤

١٢- ص= $\frac{٢س}{١+س^{٢}}$

١٣- ليكن س=ز+$\frac{١}{ز}$ و ص=ز−$\frac{١}{ز}$

(أ) عبر عن دس و دص بدلالة ز و دز

(ب) جد ميل المماس ومعادلته عندما ز= ٢

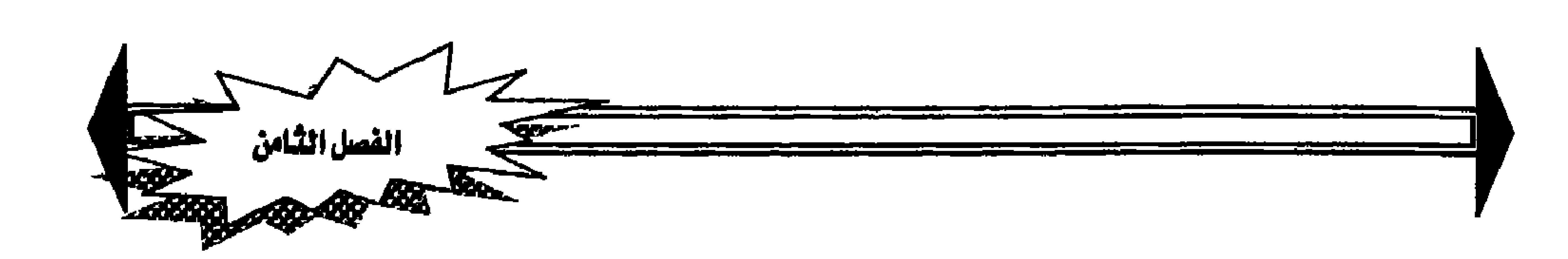
١٤- إذا كان س= $\sqrt{٢ز^{٢}+١}$ و ص= (٢ز+١)^{٢}

جد معادلة المماس عندما ز= ٢.



الرواسم والعمليات الثنائية

Mappings and Binary Operatious



الفصل الثامن

الرواسم والعمليات الثنائية

Mappings and Binary Operations

الرواسم (Mappings)

تعـد الرواسـم (التطبيقـات) مـن المفـاهيم الرياضـية ذات الأهميـة في الاستخدامات المتعددة في فروع الرياضيات وبعض الفروع العلمية الأخرى، والراسم ما هو إلا علاقة ثنائية تربط مجموعتين تحت شروط معينة.

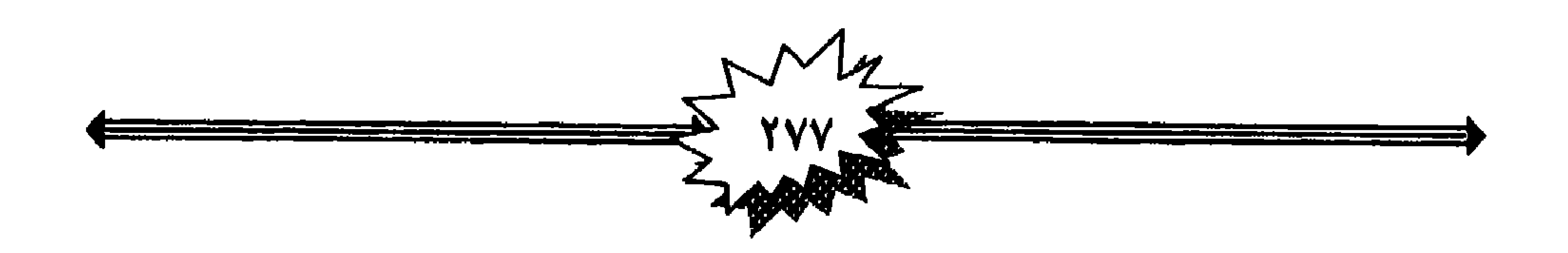
تعريف: بفرض أن أ، ب مجموعتان غير خاليتين، الراسم (التطبيق) من المجموعة أ إلى المجموعة ب هو علاقة تربط كل عنصر من عناصر أ بعنصر وحيد من عناصر ب، ويرمز للراسم بالرمز ق، ك، هـ ... وإذا كان ق راسم من المجموعة أ إلى المجموعة ب فإننا نكتب ق: أ ⟵ب، وإذا كان (م، ب) ∈ ق فإننا نقول إن ب صورة (image) العنصر م بواسطة الراسم ق وتكتب ق(م)= ب.

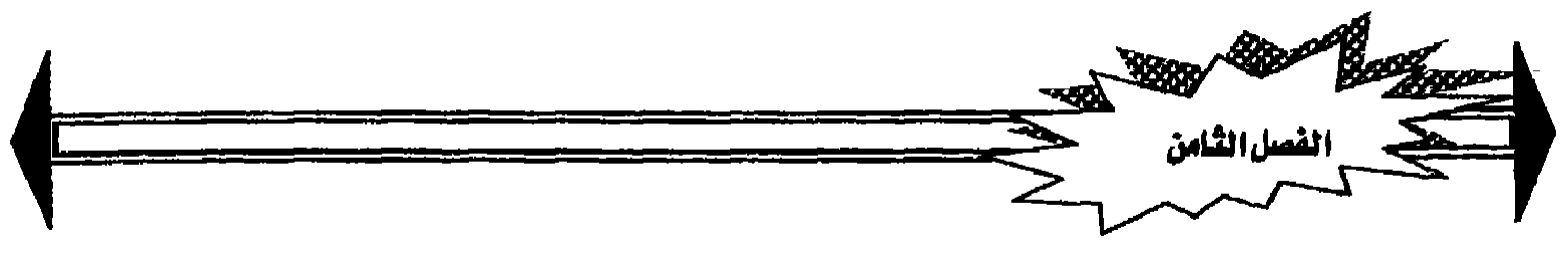
تعريف:

إذا كان ق: أ ⟵ب راسماً، فإن:

(أ) المجموعة أ تسمى نطاق أو مجال الراسم ق

(ب) المجموعة ب تسمى النطاق المصاحب أو المجال المقابل للراسم ق.





(جـ) المجموعة ق(أ)= {ب ∈ ب[1] : E ⍖ ∈ أ، ق(⍖)= ب} تسمى مدى الراسم ق.

مثال:

إذا كانت أ= {⍖، ب، جـ، د}، وكانت ب= {١، ٢، ٣، ٤}، فأي من العلاقات الآتية تعد راسماً من ⍖ إلى ب؟

$ح_1$= {(⍖، ١)، (ب، ١)، (جـ، ١)، (د، ١)}

$ح_2$= {(⍖، ١)، (⍖، ٢)، (⍖، ٣)}

$ح_3$= ⍖ × ب

$ح_4$= {(⍖، ١)، (ب، ٢)، (جـ، ٣)، (د، ٤)}

وعندما تكون العلاقة راسماً أوجد المجال والمجال المقابل والمدى.

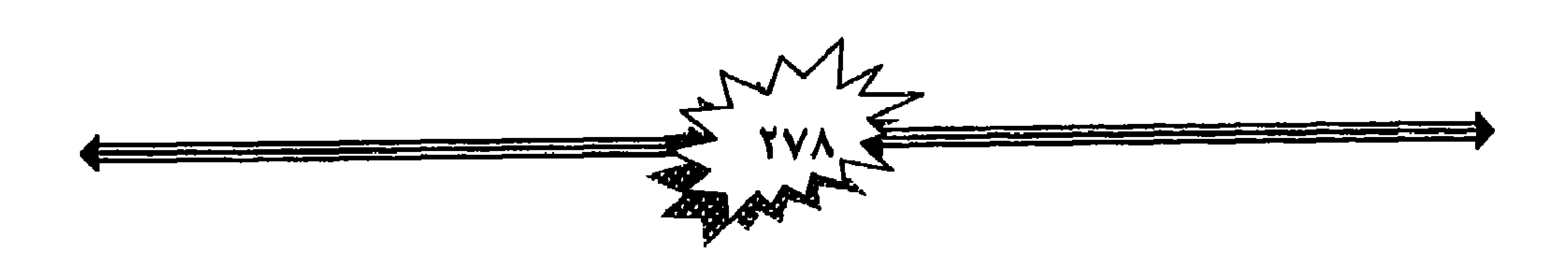
الحل:

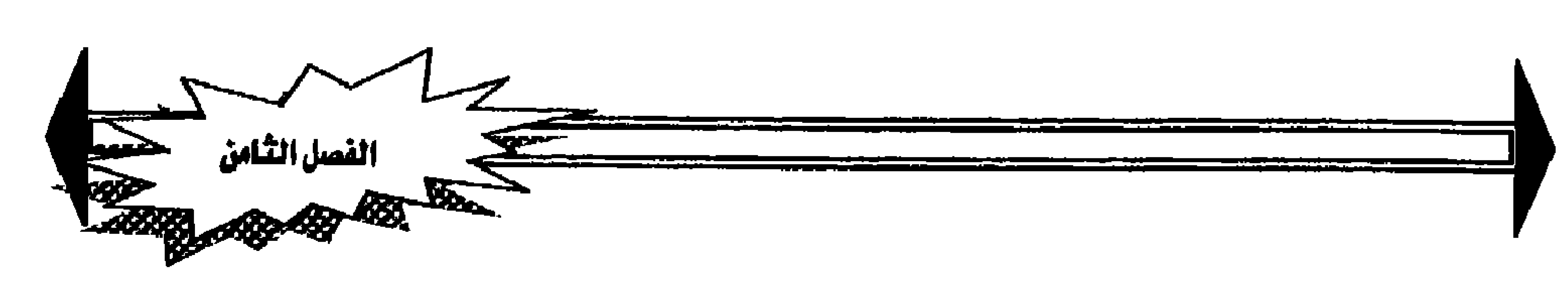
أولاً: $ح_1$ راسم من أ إلى ب، حيث أن كل عنصر من أ ارتبط مع عنصر وحيد من ب مع الملاحظة أنه لا مانع من ارتباط أكثر من عنصر من عناصر أ بالعنصر نفسه من ب، لذلك سوف نرمز للعلاقة $ح_1$ بالرمز ق: أ ⟵ ب، المجال= أ، المجال المقابل= ب، المدى= {١}

ثانياً: $ح_2$ ليست راسماً لسببين هما:

١- العنصر ⍖ من المجموعة أ ارتبط مع أكثر من عنصر من عناصر ب.

٢- يوجد عنصر في أ مثل ب أو د لم يرتبط مع أي عناصر من عنصر ب.





ثالثاً: $ح_3$= أ × ب لا يعد راسماً، حيث أن أي عنصر من عناصر المجموعة أ مرتبط مع كل عنصر من عناصر المجموعة ب، أي بأكثر من عنصر.

رابعاً: $ح_4$ تعد راسماً من المجموعة أ إلى المجموعة ب، وبذلك يكون المجال= أ المجال المقابل= ب، المدى= ب.

ملحوظة:

مدى أي راسم هو مجموعة جزئية من المجال المقابل.

مثال:

إذا كان ق: ح ⟵ {-١، ١} حيث:

ق(س)= { ١ إذا كانت س عدداً نسبياً ؛ -١ إذا كانت س عدداً غير نسبي

فإن ق راسم من ح إلى {-١، ١}

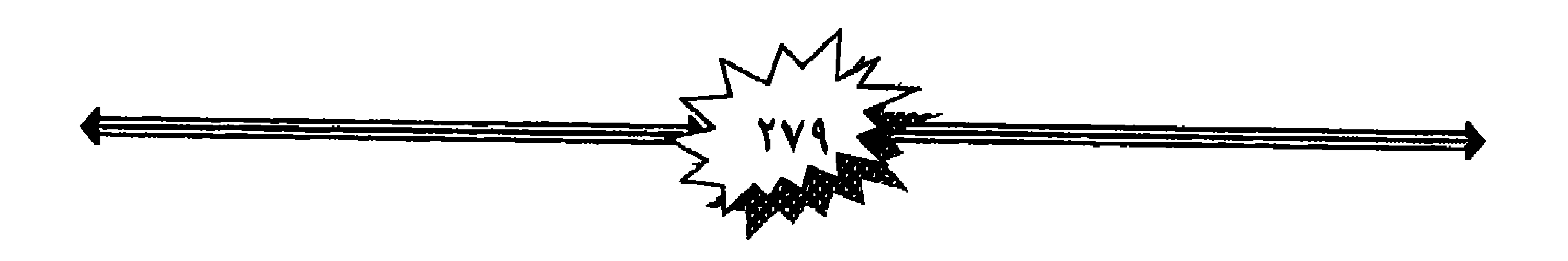
تعريف: إذا كان ق: أ⟵ب، ك: س⟵ص راسمين، يقال أن الراسمين ق، ك متساويان إذا تحققت الشروط التالية:

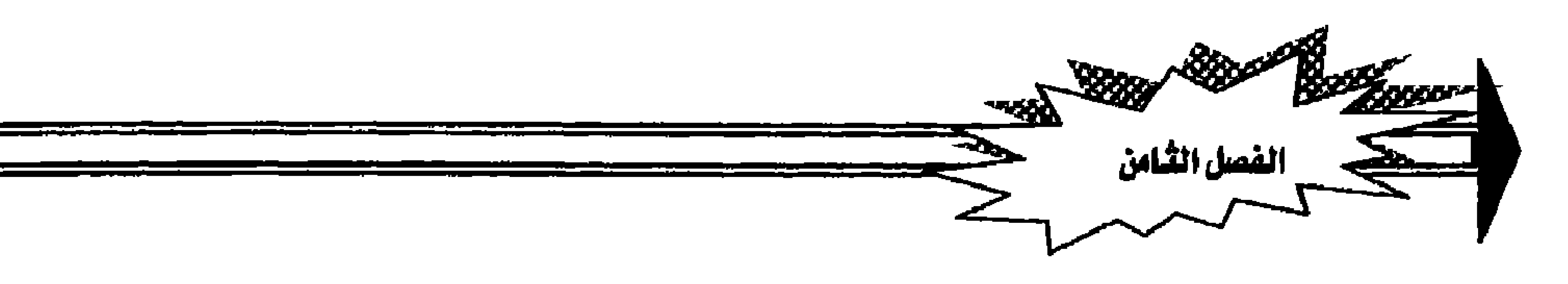
(أ) مجال ق= مجال ك، أي أن أ= س.

(ب) المجال المقابل للراسم ق= المجال المقابل للراسم ك.

(جـ) صيغة ق هي نفسها صيغة ك، أي أن ق(م)= ك(م) ∀ م ∈ أ = س

واضح أن الراسم لا يساوي إلا نفسه وبنفس المجال والمجال المقابل.





مثال:

بفرض أن ك: ص ⟵ ط، ق: ص ⟵ ص، حيث:

ق(م) = $م^2$، ∀ م ∈ ص، ك(م) = $م^2$، ∀ م ∈ ص

واضح أن ق، ك لهما المجال نفسه والصيغة نفسها لكن المجالين المقابلين مختلفان، لذلك من الخطأ القول إن ق، ك متساويان.

أنواع الرواسم: Types Mapping

تعريف: إذا كان ق: أ ⟵ ب راسماً فإنه يقال إن:

(أ) ق راسم أحاديث (متباين) (١-١ one to one)، إذا تحقق الشرط الآتي:

∀ $س_1$، $س_2$ ∈ أ، $س_1 \neq س_2 \Longrightarrow$ ق($س_1$) ≠ ق($س_2$)

أو بطريقة مكافئة إذا تحقق الشرط التالي:

∀ $س_1$، $س_2$ ∈ أ، ق($س_1$) = ق($س_2$) $\Longrightarrow س_1 = س_2$

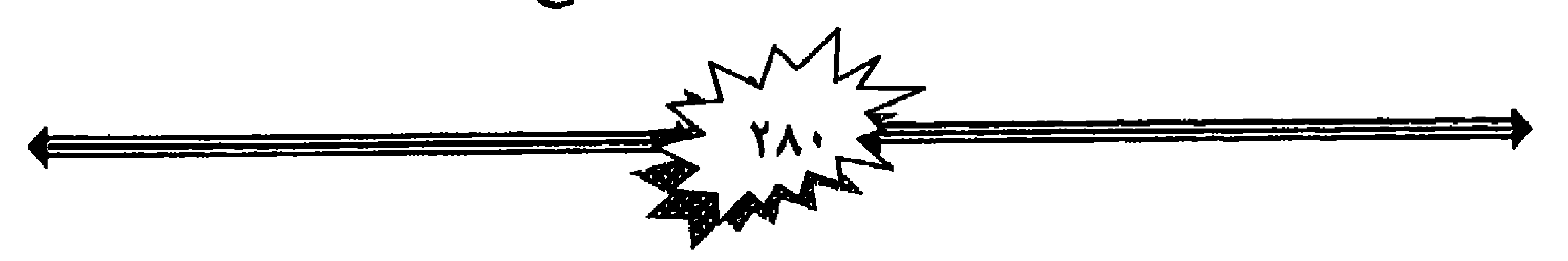
(ب) ق راسم فوقي (غامر أو شامل) (onto)، إذا كان ق(أ)= ب، أي المدى= المجال المقابل، أي أن ∀ ص ∈ ب E س ∈ أ: ق(س)= ص

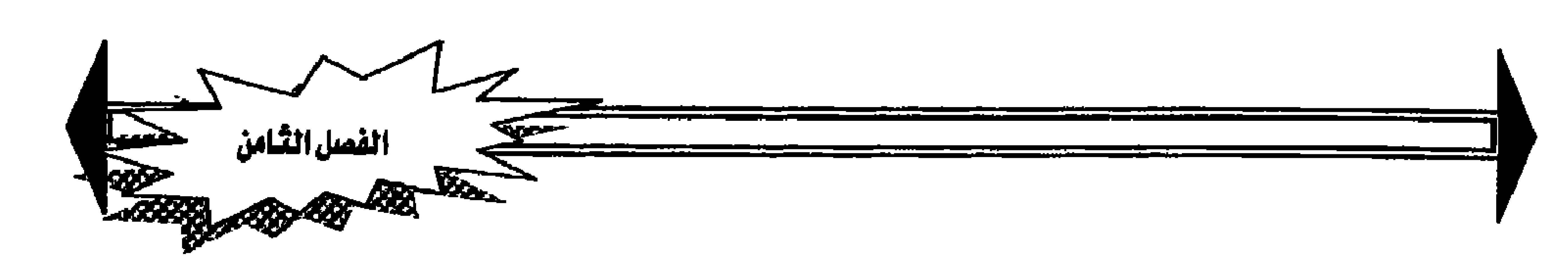
(جـ) ق تناظر أحادي (تقابل) (bijective ١-١)، إذا كان أحادياً وفوقياً.

مثال:

ادرس الراسم ق: ص ⟵ ص المعرف كما يلي: ق(س)= − س، ∀س ∈ ص

(أي بين ما إذا كان ق أحادياً من عدمه وفوقياً مع من عدمة)





الحل:

لتكون ق(س$_١$)= ق(س$_٢$) $\Longleftarrow$ –س$_١$ = –س$_٢$ $\Longleftarrow$ س$_١$ = س$_٢$ ∴ ق أحادي

∀ل ∈ ص E–ل ∈ ص: ق(–ل)= –(–ل)= ل

∴ ق فوقي، وعلى ذلك فإن ق تناظر أحادي.

مثال: ادرس الراسم ق: ط ⟵ص المعرف كما يلي: ق(س)= –س،∀س∈ ط

الحل:

الراسم ق لا يساوي الراسم المعرف في المثال الأول، رغم تطابق الصيغتين وتساوي المجالين المقابلين، وذلك للاختلاف في المجال، وسوف يترتب على ذلك أن ق في هذا المثال أحادي، لكنه ليس فوقياً، حيث ε ∈ ص ولكن –ε∉ط أي أن العنصر ε لا يمثل صورة لأي عنصر من ط. وعلى ذلك فإن ق ليس تناظراً أحادياً.

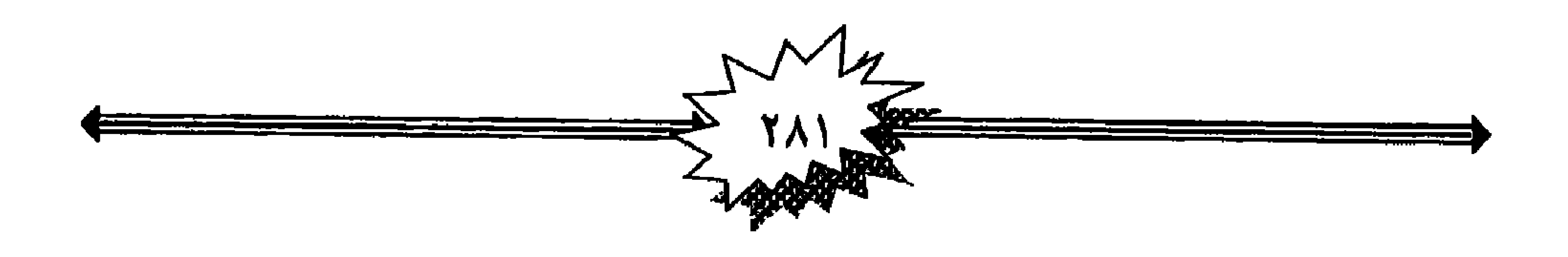
مثال: ادرس الراسم ق: ص⟵ص المعرف كما يلي:

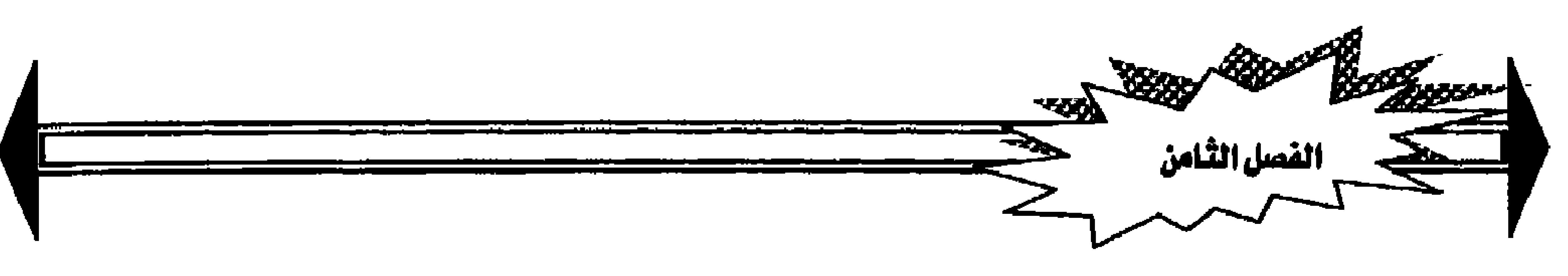
ق(س)= ٣س، ∀س ∈ ص

الحل:

لتكن ق(س$_١$)= ق(س$_٢$) $\Longleftarrow$ ٣س$_١$ = ٣س$_٢$ $\Longleftarrow$ س$_١$ = س$_٢$

∴ ق أحادي ولكن ق ليس فوقياً، لأي عنصر في س في المجال المقابل كي يكون صورة فلا بد من وجود العنصر $\frac{س}{٣}$ في المجال، والأخير قد لا





يوجد فعلى سبيل المثال العنصر ٥ في المجال المقابل لا يمثل صورة لأي عنصر من عناصر المجال لأن المجال ص لا يحتوي على العدد $\frac{٥}{٣}$.

∴ ق ليس تناظراً أحادياً.

مثال: ادرس الراسم ق: ص⟵ص المعرف كما يلي:

ق(س)= $س^{٢}$، ∀س ∈ ص

الحل:

لتكن ق($س_{١}$)= ق($س_{٢}$) ⟸ $س_{١}^{٢}=س_{٢}^{٢}$ ⟸ $س_{١} = ± س_{٢}$

أي ليس بالضرورة أن يكون $س_{١}= س_{٢}$، وعلى سبيل المثال ق(-٢)= ق(٢)= ٤

مع أن ٢≠-٢. وعلى ذلك ق ليس أحادياً، كما أن ق ليس فوقياً، لأن الأعداد السالبة في المجال المقابل ليست صوراً لأي عنصر من عناصر المجال.

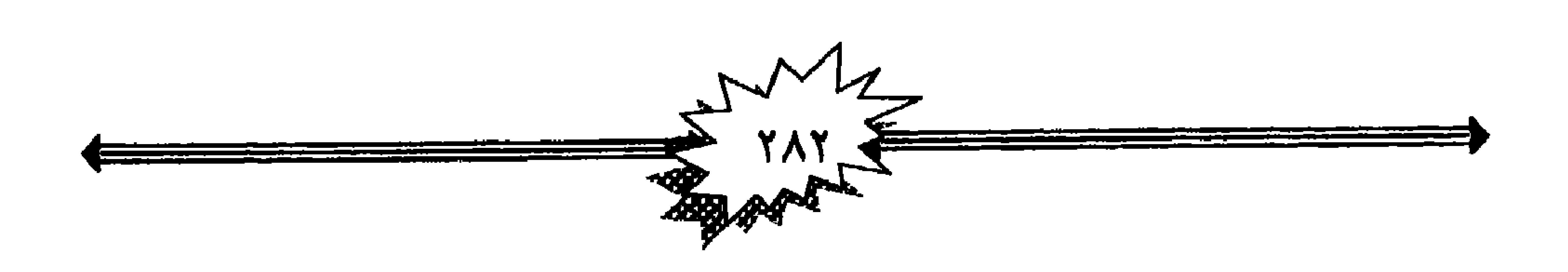
∴ الراسم ق ليس تناظرياً أحادياً.

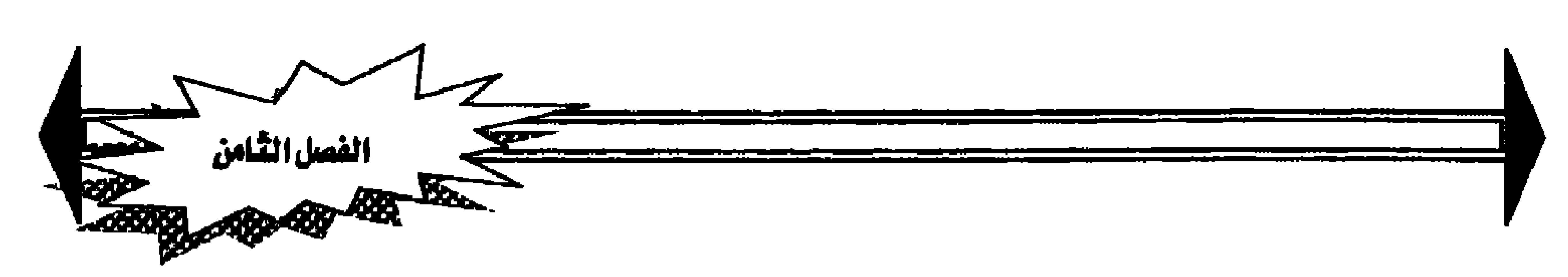
مثال: ادرس الراسم ق: ص⟵ص المعرف كما يلي: ق(س)= $س^{٣}$، ∀س ∈ ص

الحل:

لتكن ق ($س_{١}$)= ق($س_{٢}$) ⟸ $س_{١}^{٣}=س_{٢}^{٣}$ ⟸ $س_{١}= س_{٢}$

∴ ق أحادي





الراسم ق ليس فوقياً، حيث توجد أعداد في المجال المقابل جذرها الثالث ليس عدداً صحيحاً، مثلاً العدد ٥ لا يمثل صورة لأي عدد في ص لأن $\sqrt[3]{٥} \notin$ ص.

∴ ق ليس تناظراً أحادياً.

تعريف:

أ) إذا كان ق: أ ⟵ أ راسماً بحيث ∀س ∈ أ، ق(س)= س فإن ق يسمى راسم تطابق ويرمز له بالرمز و$_أ$ وأحياناً و إن لم يحدث اختلاط في الأمر.
وإذا كانت ب ⊆ أ فإن ي: ب ⟵ أ المعرف كما يلي:

ي(س)= و(س)، ∀س ∈ ب

يسمى راسم احتواء ويرمز له بالرمز و$_ب$.

ب) وإذا كان ق: أ ⟵ ب راسماً معرفاً كما يلي: ق(س)= ص$_٠$، ∀س ∈ أ فإنه يقال عن ق إنه راسم ثابت.

جـ) إذا كان ق: أ ⟵ ب راسماً وكان أ$_١$ ⊆ أ فإن الراسم ق/ أ$_١$: أ$_١$ ⟵ ب والمعرف كما يلي:

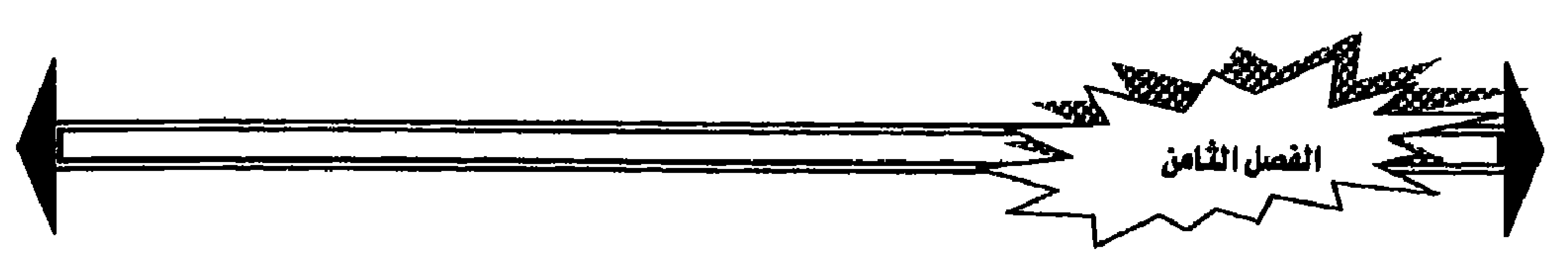
(ق/أ$_١$) (س)= ق(م)، ∀س ∈ أ$_١$

يسمى تقييد الراسم ق على أ$_١$.

ملحوظة:

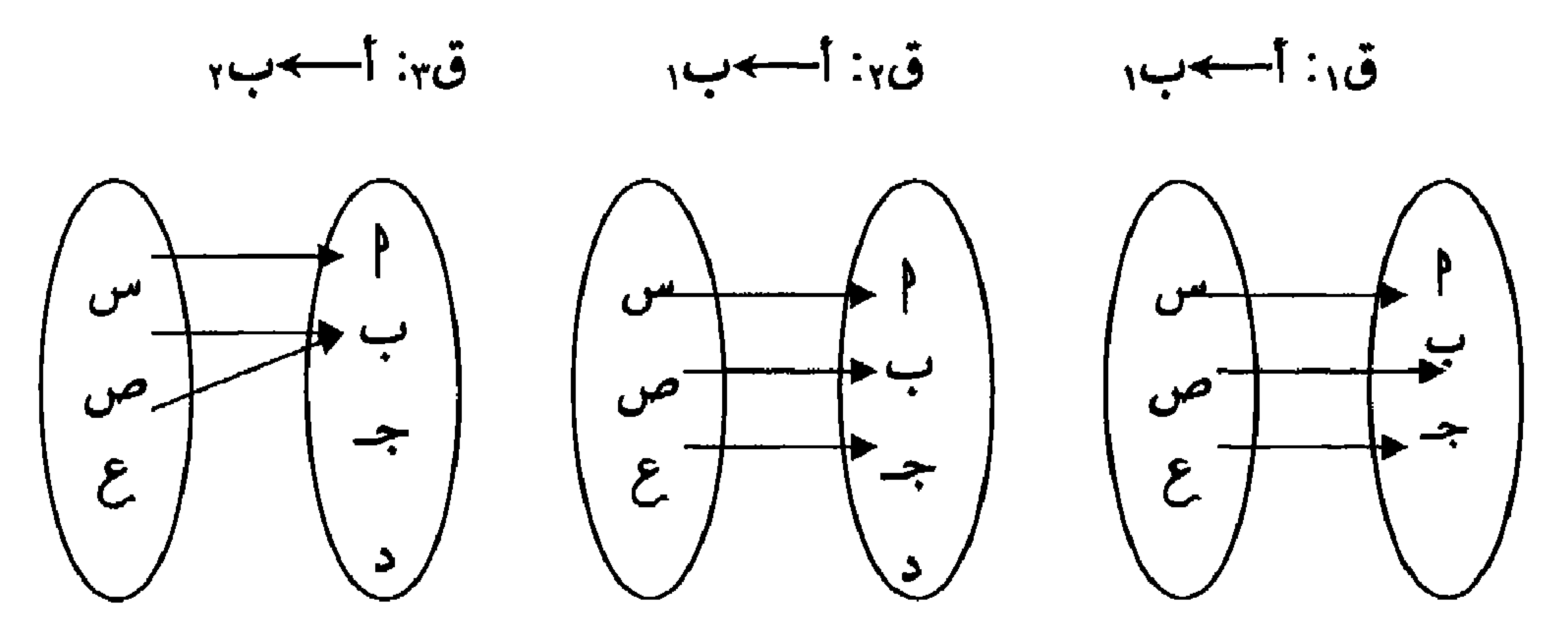
إذا كان ق: أ ⟵ ب راسماً فإن ق$^{-١}$: ب ⟵ أ ليس بالضرورة راسماً لكنه





علاقة من ب إلى أ وقد يكون راسماً ولكن تحت شروط معينة تتضح من المثال الآتي:

مثال: نفرض أن أ= {س، ص، ع}، $ب_{١}$= {أ، ب، جـ، د}، $ب_{٢}$= {أ، ب، جـ}. نعرف الراسمين $ق_{١}$، $ق_{٢}$ من أ إلى $ب_{١}$ والراسم $ق_{٣}$ من أ إلى $ب_{٢}$ كما هو مبين بالمخططات السهمية التالية:



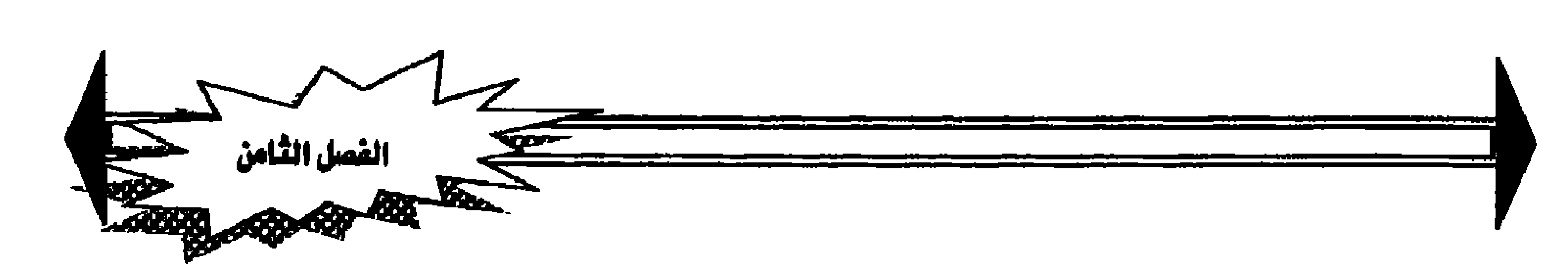
نلحظ أن $ق_{١}^{-١}$:$ب_{١}$← أ علاقة لكنها ليست راسماً لسببين هما:

الأول: ارتباط العنصر ب بعنصرين من أ هما ص، ع وهذا يتعارض مع تعريف الراسم.

الثاني: أنه يوجد عنصر في $ب_{١}$ مثل العنصر جـ لم يرتبط مع أي عنصر من عناصر أ.

السبب الأول نتيجة مباشرة لكون أن الراسم $ق_{١}$ ليس أحادياً حيث إن $ق_{١}$(ص)= $ق_{١}$(ع)=ب، ص ≠ ع، والسبب الثاني نتيجة مباشرة لكون أن $ق_{١}$ ليس فوقياً حيث يوجد عنصر في المجال المقابل لا يمثل صورة لأي عنصر من المجال مثال العنصر جـ. كما أن $ق_{٢}^{-١}$:$ب_{١}$← أ ليس راسماً، حيث يوجد د في





المجال لم يرتبط مع أي عنصر مع عناصر المجال المقابل وهذه نتيجة مباشرة لكون ق٢ ليس فوقياً. وأخيراً فإن $ق_٣^{-١}: ب_٣ \to أ$ راسم وهذه نتيجة مباشرة لكون أن ق٣ تناظر أحادي.

نظرية:

إذا كان ق: أ ⟵ ب$^{(١)}$ تناظراً أحادياً فإن المعكوس $ق^{-١}$ راسم وتناظر أحادي أيضاً وأن $ق^{-١} \circ ق = و_أ$، $ق \circ ق^{-١} = و_ب$

البرهان: لما كان ق تناظراً أحادياً فإن كل عنصر من عناصر ب$^{(١)}$ هو صورة لعنصر وحيدمن أ وهذا يترتب عليه أن تكون الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر ب$^{(١)}$ هي عنصر وحيد في أ، أي أن لكل ب ∈ ب$^{(١)}$ يوجد عنصر وحيد أ ∈ أ بحيث يكون $ق^{-١}$(ب)= أ، إذن $ق^{-١}$ أحادي وطالما ق أحادي، ق(أ)= ب فإن $ق^{-١}$(ب$^{(١)}$)= أ إذن $ق^{-١}$ فوقي.

∴ $ق^{-١}$ تناظر أحادي.

أيضاً:

∀ أ ∈ أ، ب ∈ ب$^{(١)}$، ق(أ)= ب ⇔ أ= $ق^{-١}$(ب)

∴ ∀ أ ∈ أ ⟹ $(ق^{-١} \circ ق)$ (أ)= $ق^{-١}$(ق(أ))

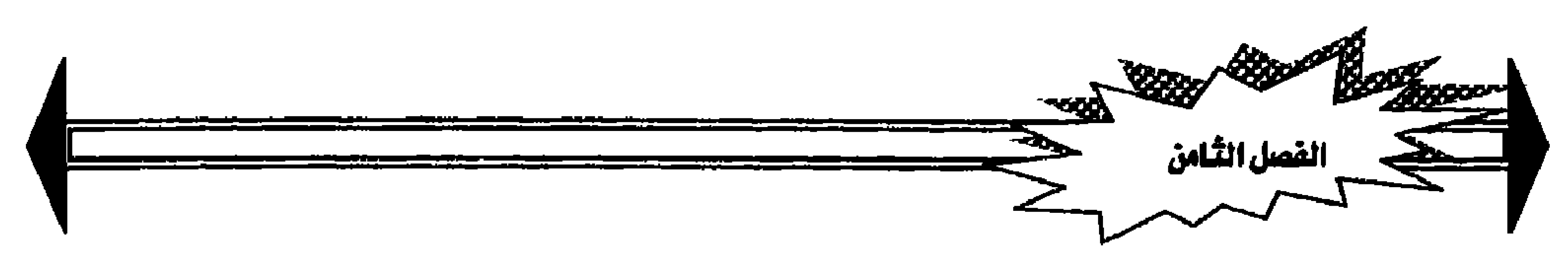
= $ق^{-١}$(ب)= أ = $و_أ$(أ)

∴ $ق^{-١} \circ ق = و_أ$

وكذلك

∀ب∈ ب$^{(١)}$، $(ق \circ ق^{-١})$ (ب)= ق($ق^{-١}$(ب))= ق(أ)= ب = $و_{ب^{(١)}}$ (ب)





$\therefore$ (ق ○ $ق^{-1}$)= $و_{ب(1)}$

نظرية: إذا كان ق: أ ← ب راسماً وكانت $أ_1$ و $أ_2$ مجموعتين جزئيتين من أ وأن $ب_1$، $ب_2$ مجموعتان جزئيتان من ب[1]، فإن

(i) $أ_1 \subseteq أ_2 \Leftarrow ق(أ_1) \subseteq ق(أ_2)$

(ii) $ق(أ_1 \cup أ_2) = ق(أ_1) \cup ق(أ_2)$

(iii) $ق(أ_1 \cap أ_2) \subseteq ق(أ_1) \cap ق(أ_2)$

$ق(أ_1 - أ_2) \subseteq ق(أ_1) - ق(أ_2)$

(vi) $ق(ق^{-1}(ب_1)) \subseteq ب_1$،

(v) $ق^{-1}(ق(أ_1)) \leq أ_1$

(iv) $ق^{-1}(ب_1 \cap ب_2) \subseteq ق^{-1}(ب_1) \cap ق^{-1}(ب_2)$

(iiv) $ق^{-1}(ب_1 \cup ب_2) = ق^{-1}(ب_1 \cup ب_2) = ق^{-1}(ب_1) \cup ق^{-1}(ب_2)$

(iiiv) $ق^{-1}(\overline{ب_1}) = \overline{(ق^{-1}(ب_1))}$

البرهان:

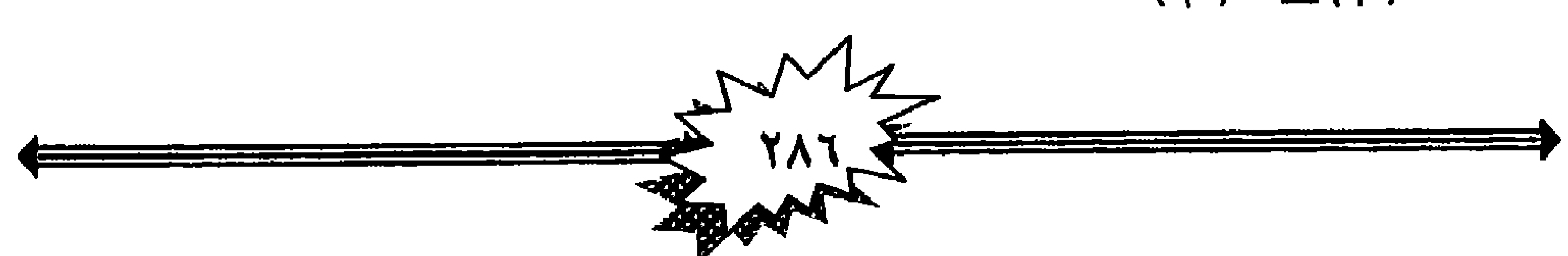
(i) لتكن ص ∋ ق($أ_1$) $\Longleftarrow$ E س ∋ $أ_1$: ق(س)= ص

ولكن

$أ_1 \subseteq أ_2$

$\therefore$ س ∋ $أ_2$ ← ق(س)= ص ∋ ق ($أ_2$)

$\therefore$ $ق(أ_1) \subseteq ق(أ_2)$



(ii) لتكن ص ∈ ق(أ$_{١}$ ∪ أ$_{٢}$) ⟸ E س ∈ أ$_{١}$ ∪ أ$_{٢}$: ق(س) = ص

إذاً س ∈ أ$_{١}$ ⟸ ق(س) = ص ∈ ق(أ$_{١}$) ⊆ ق(أ$_{١}$) ∪ ق(أ$_{٢}$)

إذاً س ∈ أ$_{٢}$ ⟸ ق(س) = ص ∈ ق(أ$_{٢}$) ⊆ ق(أ$_{١}$) ∪ ق(أ$_{٢}$)

∴ ق(أ$_{٢}$ ∪ أ$_{١}$) ⊆ ق(أ$_{١}$) ∪ ق(أ$_{٢}$) .... (١)

لتكن ص ∈ ق(أ$_{١}$) ∪ ق(أ$_{٢}$)

إذاً ص ∈ ق (أ$_{١}$) ⟸ E س ∈ أ$_{١}$: ق(س) = ص ∈ ق(أ$_{١}$ ∪ أ$_{٢}$)

إذاً ص ∈ ق (أ$_{٢}$) ⟸ E س ∈ أ$_{٢}$: ق(س) = ص ∈ ق(أ$_{١}$ ∪ أ$_{٢}$)

∴ ق(أ$_{١}$) ∪ ق(أ$_{٢}$) ⊆ ق(أ$_{١}$ ∪ أ$_{٢}$) .... (٢)

من (١) و (٢) يتضح أن:

ق(أ$_{١}$ ∪ أ$_{٢}$) = ق(أ$_{١}$) ∪ ق(أ$_{٢}$)

(iii) لتكن ص ∈ ق(أ$_{١}$ ∩ أ$_{٢}$) ⟸ E س ∈ أ$_{١}$ ∩ أ$_{٢}$: ق(س) = ص

∴ س ∈ أ$_{١}$، س ∈ أ$_{٢}$ ⟸ ص ∈ ق(أ$_{١}$) Λ ص ∈ ق(أ$_{٢}$)

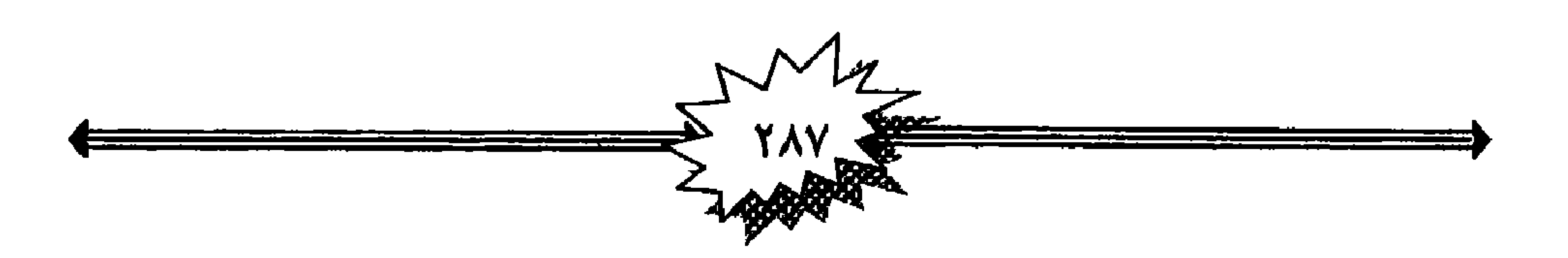
⟸ ص ∈ ق(أ$_{١}$) ∩ ق(أ$_{٢}$)

∴ ق(أ$_{١}$ ∩ أ$_{٢}$) ⊆ ق(أ$_{١}$) ∩ ق(أ$_{٢}$)

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات الجزء الثاني من هذه الفقرة، كما يلي:

إذا ص ∈ ق(أ$_{٢}$) − ق(أ$_{١}$) ⟸ ص ∈ ق(أ$_{٢}$) Λ ص ∉ ق(أ$_{١}$)

⟸ E س ∈ أ$_{٢}$، س ∉ أ$_{١}$، ق(س) = ص



⟸ س ∈ أ٢−أ١ ⟸ ق(س)= ص ∈ ق(أ٢−أ١)

∴ ق(أ٢)−ق(أ١)⊇ق(أ٢−أ١)

(iv) لتكن ص ∈ ق(ق$^{-1}$(ب١)) ⟸ Eس ∈ ق$^{-1}$ (ب١): ق(س) = ص

⟸ ق$^{-1}$(ص)= س ∈ ق$^{-1}$(ب١) ⟸ ق ق$^{-1}$(ص)= ص ∈ ب١

∴ ق(ق$^{-1}$(ب١))⊇ب١

(v) لــتكن س ∈ ق$^{-1}$ (ب١∩ب٢) ⟸ Eص ∈ ب١∩ب٢: ق(س) = ص ∈ ب١∩ب٢

⟸ ق(س)= ص ∈ ب١، ق(س)= ص ∈ ب٢

∴ س ∈ ق$^{-1}$ (ب١) Λ س ∈ ق$^{-1}$(ب٢) ⟸س ∈ ق$^{-1}$(ب١)∩ق$^{-1}$(ب٢)

∴ ق$^{-1}$(ب١∩ب٢)⊇ق$^{-1}$(ب١)∩ق$^{-1}$(ب٢)..............................(١)

ومن السهل وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن:

ق$^{-1}$(ب١)∩ق$^{-1}$(ب٢)⊇ق$^{-1}$(ب١∩ب٢)

من (١) و (٢) نحصل على الآتي:

ق$^{-1}$(ب١∩ب٢)=ق$^{-1}$(ب١)∩ق$^{-1}$(ب٢)

(vii) لـــــــتكن س ∈ ق$^{-1}$(ب١∪ب٢) ⟸ Eص ∈ ب١∪ب٢: ق(س) = ص

⟸ ص ∈ ب١ $\vee$ص ∈ ب٢ ⟸ س ∈ ق$^{-1}$ (ص) ≥ ق$^{-1}$(ب١) $\vee$س ∈ ق$^{-1}$(ص)

$\supseteq$ ق$^{-1}$(ب$_2$) $\Leftarrow$ س $\in$ ق$^{-1}$(ص) $\subseteq$ ق$^{-1}$(ب$_1$) $\cup$ ق$^{-1}$(ب$_2$)

$\therefore$ ق$^{-1}$(ب$_1 \cup$ب$_2$) $\subseteq$ ق$^{-1}$(ب$_1$) $\cup$ ق$^{-1}$(ب$_2$) .... (١)

بسهولة يمكن إثبات أن: ق$^{-1}$(ب$_1$) $\cup$ ق$^{-1}$(ب$_2$) $\subseteq$ ق$^{-1}$(ب$_1 \cap$ب$_2$)........ (٢)

من (١) و (٢) نحصل على:

ق$^{-1}$(ب$_1 \cup$ب$_2$) = ق$^{-1}$(ب$_1$) $\cup$ ق$^{-1}$(ب$_2$)

(viii) لتكن س $\in$ ق$^{-1}$($\overline{\text{ب}_1}$) $\Leftarrow$ E ص $\in$ $\overline{\text{ب}_1}$: ق(س) = ص

$\Leftarrow$ ص $\notin$ ب$_1$ $\Leftarrow$ ق(س) $\notin$ ب$_1$ $\Leftarrow$ س $\notin$ ق$^{-1}$(ب$_1$) $\Leftarrow$ س $\in$ $\overline{(\text{ق}^{-1}(\text{ب}_1))}$

$\therefore$ ق$^{-1}$($\overline{\text{ب}_1}$) $\subseteq$ $\overline{(\text{ق}^{-1}(\text{ب}_1))}$ .... (١)

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن:

$\overline{(\text{ق}^{-1}(\text{ب}_1))}$ $\subseteq$ ق$^{-1}$($\overline{\text{ب}_1}$) .... (٢)

من (١) و (٢) نحصل على أن:

ق$^{-1}$($\overline{\text{ب}_1}$) = $\overline{(\text{ق}^{-1}(\text{ب}_1))}$

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن:

$\overline{(\text{ق}^{-1}(\text{ب}_1))}$ $\subseteq$ ق$^{-1}$($\overline{\text{ب}_1}$) .... (٢)

من (١) و (٢) نحصل على:

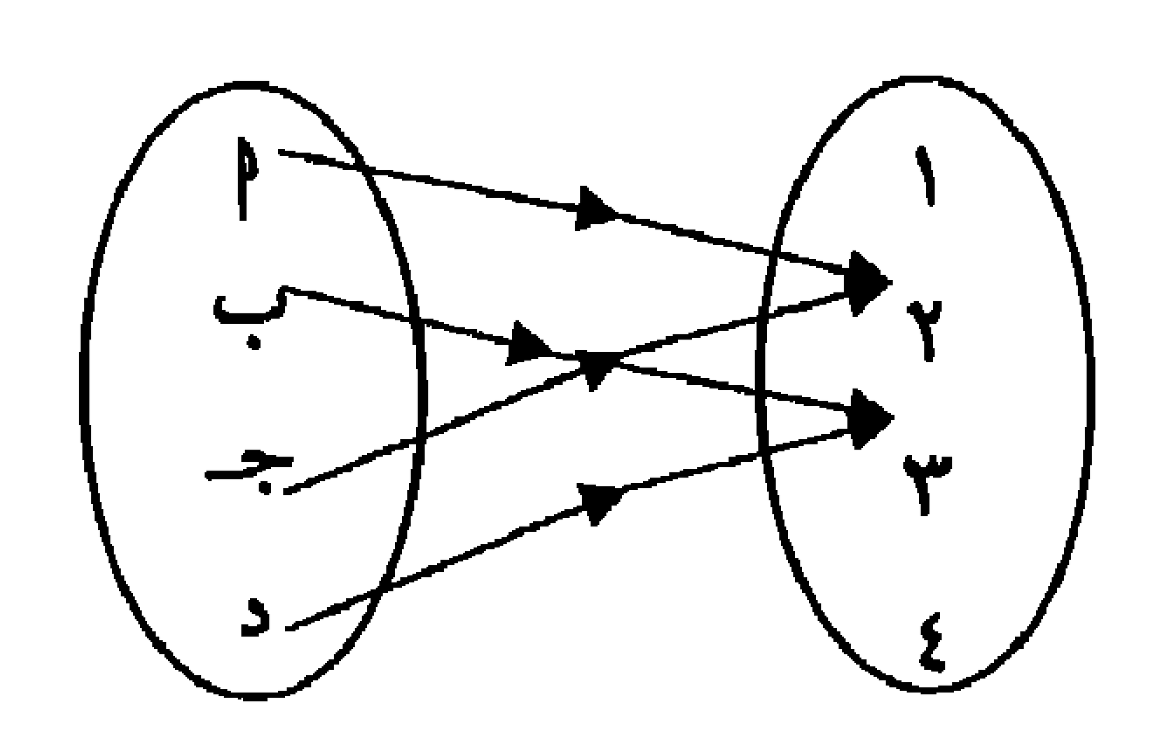
ق$^{-1}$($\overline{\text{ب}_1}$) = $\overline{(\text{ق}^{-1}(\text{ب}_1))}$

ملحوظة:

العلاقات (iii)، (iv)، (v) في النظرية السابقة في حاجة إلى أمثلة تبرر عـدم التساوي، لذلك نقدم المثالين الآتيين على اعتبار أن:

أ= {ٱ، ب، جـ، د}، ب= {١، ٢، ٣، ٤}

مثال: نفرض أن ق: أ⟵ب راسم معرف بالمخطط السهمي التالي: ق: أ⟵ب



وبفرض أن أ١= {ٱ، ب}، أ٢= {جـ د}

∴ $أ_1 \cap أ_2 = \phi \Rightarrow ق(أ_1 \cap أ_2) = \phi$ .... (١)

لكن:

ق(أ١)= {١، ٢}، ق(أ٢)= {١، ٢}

∴ $ق(أ_1) \cap ق(أ_2) = \{1، 2\}$ .... (٢)

من (١) و (٢) نحصل على:

$$ق(أ_1) \cap ق(أ_2) \nsubseteq ق(أ_1 \cap أ_2)$$

أيضاً:

$أ_1 - أ_2 = \{م، ب\} \Longleftarrow ق(أ_1 - أ_2) = \{١، ٢\}$ .... (١)

ولكن

$ق(أ_1) = ق(أ_2) = \{١، ٢\} - \{١، ٢\} = \varnothing$ .... (٢)

من (١) و (٢) نحصل على أن:

$$ق(أ_1 - أ_2) \not\supseteq ق(أ_1) - ق(أ_2)$$

ملحوظة:

واضح أن عدم التساوي نتيجة مباشرة لكون ق ليس أحادياً

مثال: بفرض أن ق: أ⟵ب راسم معرف بالمخطط السهمي الآتي:

ق: أ⟵ب

م ← ١، ب ← ٣، جـ ← ٤، د ← ٤

وأن $ب_1 = \{١، ٢\}$

$\therefore ق^{-1}(ب_1) = \{م\}$

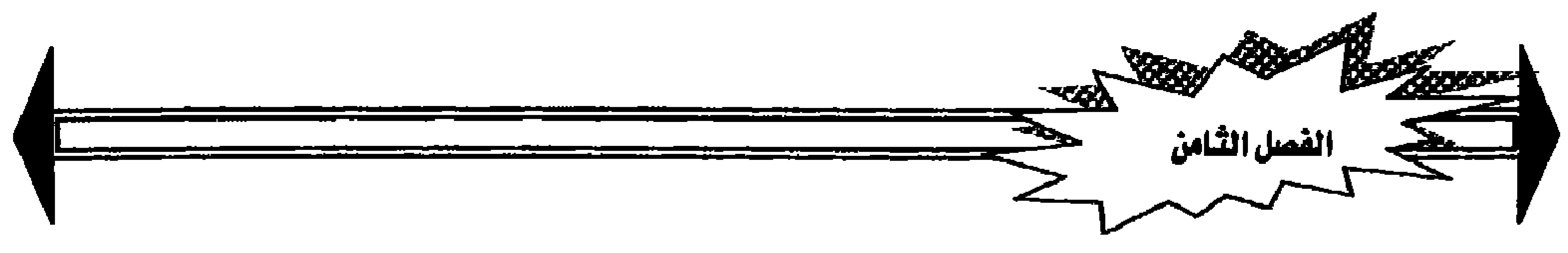
$\therefore ق(ق^{-1}(ب_1)) = \{١\} \subseteq \{١، ٢\} = ب_1$

واضح أن عدم التساوي سببه أن ق ليس فوقياً.

وبفرض أن $أ_1 = \{ب، جـ\}$

$ق(أ_1) = \{٣، ٤\}$، $ق^{-1}(ق(أ_1)) = \{ب، جـ، د\} \supseteq \{ب، جـ\} = أ_1$

$\therefore أ_1 \subseteq ق^{-1} ق(أ_1)$



لاحظ أن عدم التساوي سبب مباشر لكون ق ليس أحادياً.

مثال: إذا كان ق: ح ⟵ ح راسماً معرفاً كما يلي: ق(س)= ٣س + ٦، ∀س ∈ ح

ادرس الراسم ق (أي بين ما إذا كان تناظراً أحادياً من عدمه، وفي حالة ما إذا كان تناظراً أحادياً أوجد صيغة لمعكوس الراسم).

الحل:

لتكن ق($س_١$)= ق($س_٢$) ⟸ ٣$س_١$ + ٦= ٣$س_٢$ + ٦ ⟸ $س_١$ = $س_٢$

∴ ق أحادي.

ق(س)= ص= ٣س + ٦ ⟸ س= $\frac{ص-٦}{٣}$

∴ س=$ق^{-١}$(ص)= $\frac{ص-٦}{٣}$

وحيث أن المقدار $\frac{ص-٦}{٣}$ دائماً عدد حقيقي أي أن $\frac{ص-٦}{٣}$ ∈ ح، ∀ ص ∈ ح

∴ ق فوقي.

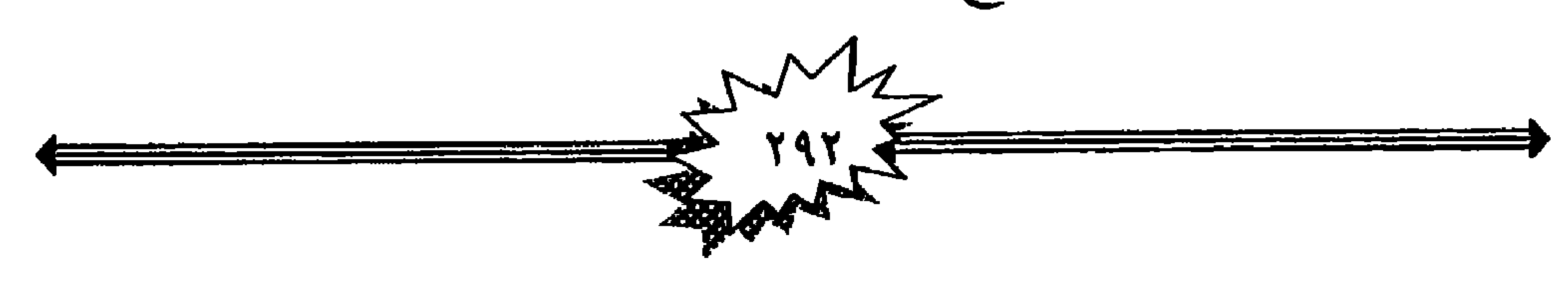
على ذلك فإن ق تناظر أحادي ومعكوسة $ق^{-١}$ راسم معرف كما يلي:

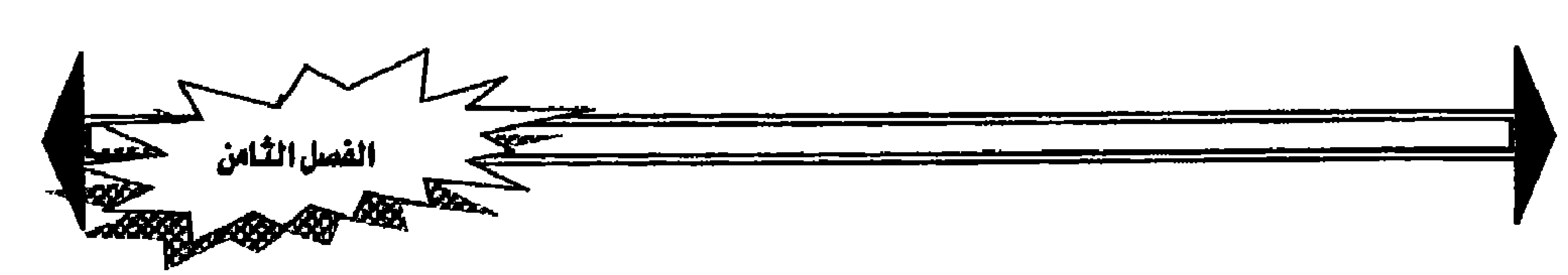
$ق^{-١}$: ح ⟵ ح: $ق^{-١}$(س)= $\frac{س-٦}{٣}$، ∀ ص ∈ ح

مثال:

إذا كان كل من ق: ح ⟵ ح، ك: ح ⟵ ح راسماً، حيث:

ق(س)= ٢س، ∀س ∈ ح





ك(س)= $س^2 + 5$، ∀س ∈ ح

أوجد صيغة للتحصيل ك ○ ق، ق ○ ك ثم بين أن عملية تحصيل الرواسم غير إبدالية.

الحل:

(ك ○ ق)(س)= ك(ق(س))= ك(٢س)= $٤س^2 + 5$

(ق ○ ك)(س)= ق(ك(س))= ق($س^2 + 5$)= $٢س^2 + 10$

واضح أن عملية تحصيل الرواسم ليست إبدالية، فمثلاً بفرض أن س= ٥.

∴ (ك ○ ق)(٥)= ٤س (٢٥) + ٥= ١٠٥

∴ (ق ○ ك)(٥)= ٢س (٢٥) + ١٠= ٦

∴ (ك ○ ق) (٥) ≠ (ق ○ ك)(٥)

نظرية: إذا كان كل من ق: أ⟵ب، ك: ب⟵جـ تناظراً أحادياً.

أثبت أن:

(أ) الراسم المحصل (ك ○ ق) أيضاً تناظراً أحادياً.

(ب) $(ك ○ ق)^{-1} = ق^{-1} ○ ك^{-1}$

البرهان:

(أ) ك ○ ق أحادي، لأن:

إذا (ك ○ ق)($س_1$)= (ك ○ ق)($س_2$) ⟸ ك(ق($س_1$))= ك(ق($س_2$))





∴ ك(ق($س_١$))= ك(ق($س_٢$))

ولكن ك أحادي.

∴ ق($س_١$) = ق($س_٢$)

ولكن ق أحادي، وعليه فإن $س_١$ = $س_٢$

∴ (ك ○ ق) أحادي.

أيضاً (ك ○ ق) فوقي، حيث لكل عنصر جـ ∈ ج يوجد عنصر ب ∈ ب[١] بحيث ك(ب)= جـ وذلك لأن ك فوقي، كما يترتب على ذلك وجود ا ∈ أ بحيث ق(ا)= ب لأن ق فوقي وعلى ذلك فإن لكل جـ ∈ ج يوجد ا ∈ أ بحيث:

(ك ○ ق)(ا)= ك(ق(ا))= ك(ب)= جـ

∴ (ك ○ ق) فوقي.

∴ ك ○ ق تناظر أحادي.

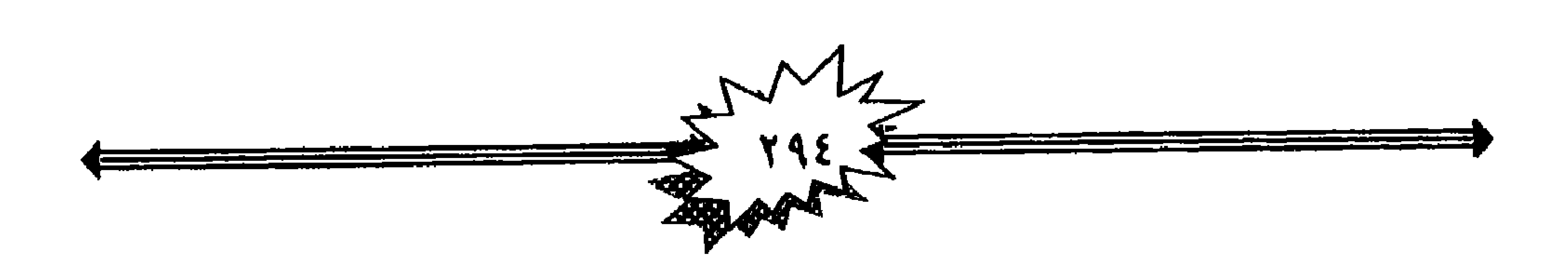
(ب) سوف نبرهن أن $ق^{-١}$ ○ $ك^{-١}$ هو معكوس يميني للراسم المحصل ك ○ ق

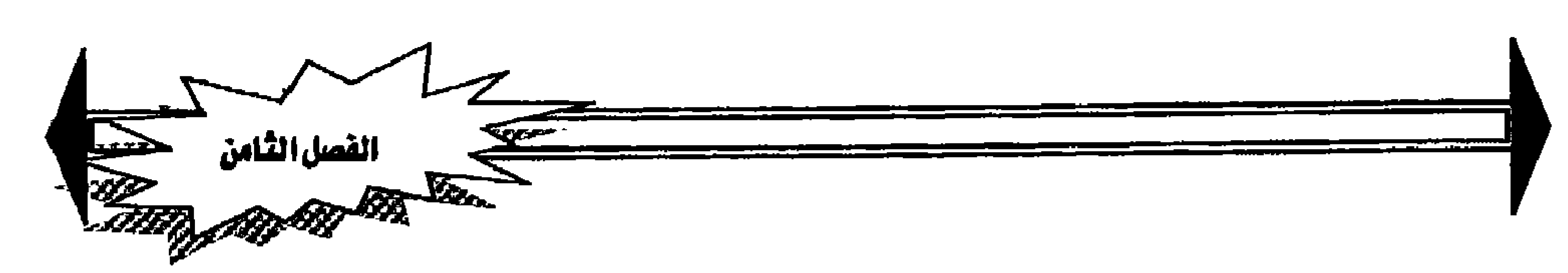
أي أن:

(ك ○ ق) ○ ($ق^{-١}$ ○ $ك^{-١}$) = $و_{جـ}$

وأيضاً $ق^{-١}$ ○ $ك^{-١}$ معكوس يساوي الراسم المحصل ك ○ ق، أي أن:

($ق^{-١}$ ○ $ك^{-١}$) ○ (ك ○ ق)= $و_{أ}$





وذلك كما يلي:

$$(ك \circ ق) \circ (ق^{-1} \circ ك^{-1}) = ك \circ (ق \circ ق^{-1}) \circ ك^{-1}$$

$$= ك \circ و_ب \circ ك^{-1}$$

$$= ك \circ ك^{-1} = و_جـ$$

وأيضاً:

$$(ق^{-1} \circ ك^{-1}) \circ (ك \circ ق) = ق^{-1} \circ (ك^{-1} \circ ك) \circ ق$$

$$= ق^{-1} \circ و_ب \circ ق = و_ا$$

وعلى ذلك يكون الراسم المحصل $ق^{-1} \circ ك^{-1}$ معكوساً للراسم المحصل $(ك \circ ق)$ أي أن:

$$(ك \circ ق)^{-1} = ق^{-1} \circ ك^{-1}$$

مثال:

إذا كان ق: ح ⟵ ح، ك: ح ⟵ ح راسمين معرفين كما يلي:

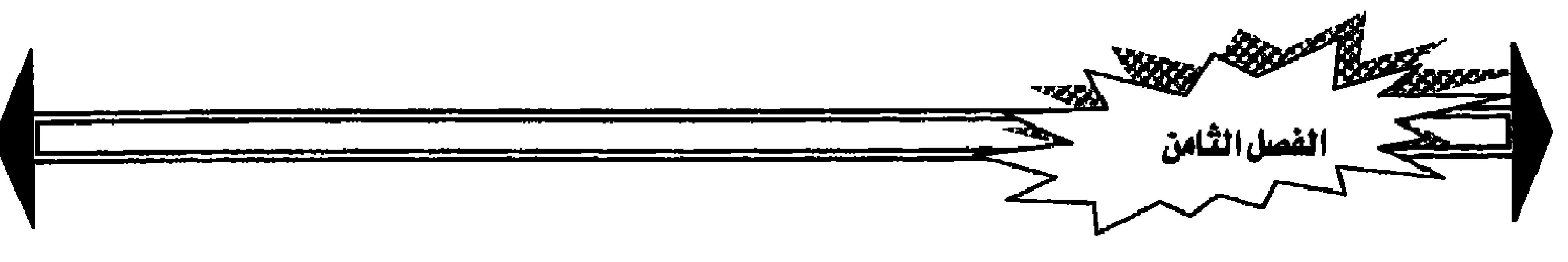
ق(س)= ٣س+ ٥، ∀س ∈ ح، ك(س)= ٢س-٧، ∀س ∈ ح

أثبت أن $(ك \circ ق)$ تناظر أحادي، ومن ثم أوجد المعكوس بطريقتين مختلفتين.

الحل:

أولاً: من خلال المثال ما قبل السابق يمكن بسهولة إثبات أن:





(أ) الراسم ق: ح⟵ح تناظر أحادي، ومعكوسه هو $ق^{-1}$: ح⟵ح، حيث

$ق^{-1}(س) = \frac{س - ٥}{٣}$ ، ∀س ∈ ح

(ب) الراسم ك: ح⟵ح تناظر أحادي ومعكوسه هو $ك^{-1}$: ح⟵ح،
حيث

$ك^{-1}(س) = \frac{س + ٧}{٢}$ ، ∀س ∈ ح

إذن (ك ○ ق) تناظر أحادي، ومعكوسه هو ρ= $(ك○ق)^{-1}$ = $ق^{-1}$ ○ $ك^{-1}$

ρ(س)= ($ق^{-1}$ ○ $ك^{-1}$)(س)= $ق^{-1}$(ك (س))= $ق^{-1}\frac{(س+٧)}{٢} = \frac{س - ٣}{٦}$

ثانياً: يمكن الحصول على المعكوس بطريقة أخرى وذلك كما يلي:

(ك ○ ق)(س)= ك(ق(س)= ك(٣س+٥)= ٢(٣س+٥)-٧= ٦س+٣

وبالطريقة نفسها التي تمت في مثال سابق يمكن إثبات أن (ك ○ ق)

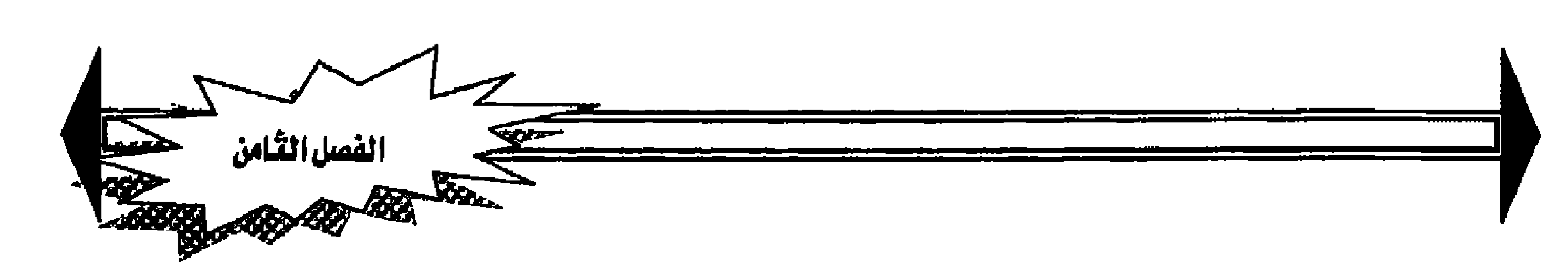
تناظر أحادي، وبالتالي معكوسه هو:

ρ= $(ك ○ ق)^{-1} = \frac{س - ٣}{٦}$

العمليات الثنائية:

إن مفهوم العمليات الثنائية يُفرض في حياتنا اليومية فمثلاً مفهوم الجمع على مجموعة الأعداد الصحيحة ما هو إلا عملية ثنائية حيث إن مجموع عددين صحيحن هو عدد صحيح، وكذلك عملية الضرب على مجموعة الأعداد الصحيحة. إن مفهوم العملية الثنائية أشمل من أن يقتصر فقط على عملية





الجمع أو الضرب أو الطرح أو القسمة، ولكن هذه العمليات تعتبر حالات خاصة، كما أن العملية الثنائية قد تكون على مجموعة ليست هي إحدى مجموعات الأعداد المعروفة، كل هذا سوف يتضح من خلال دراستنا لمفهوم العملية الثنائية، ومن خلال الأمثلة التي سوف نطرحها في هذا الباب.

تعريف: بفرض أن س $\neq \Phi$، العملية الثنائية (ويرمز لها بالرمز τ أو * أو $\circ$) على المجموعة س هي راسم من س^{2} إلى س، اي أن τ عملية ثنائية على س يعني أن:

τ: س × س ⟵ س: $\forall$(س، ص) $\in$ س × س $\Longrightarrow$ τ(س، ص) $\in$ س

على ان يكون τ (س، ص) وحيداً، الرمز τ(س، ص)= سτص يعني ارتباط العنصر س بالعنصر ص وفقاً للعملية الثنائية τ.

مثال: + عملية ثنائية على ص حيث +: ص × ص ⟵ ص راسم لأن:

$\forall$(س، ص) $\in$ ص × ص +(س، ص)= س + ص $\in$ ص

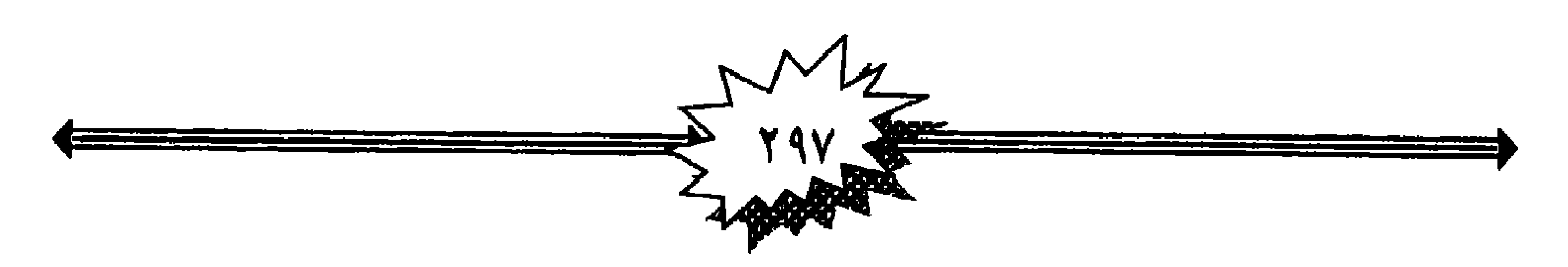
مثال: عملية الاتحاد $\cup$ عملية ثنائية على ب(س) لأي مجموعة غير خالية س وذلك لأن:

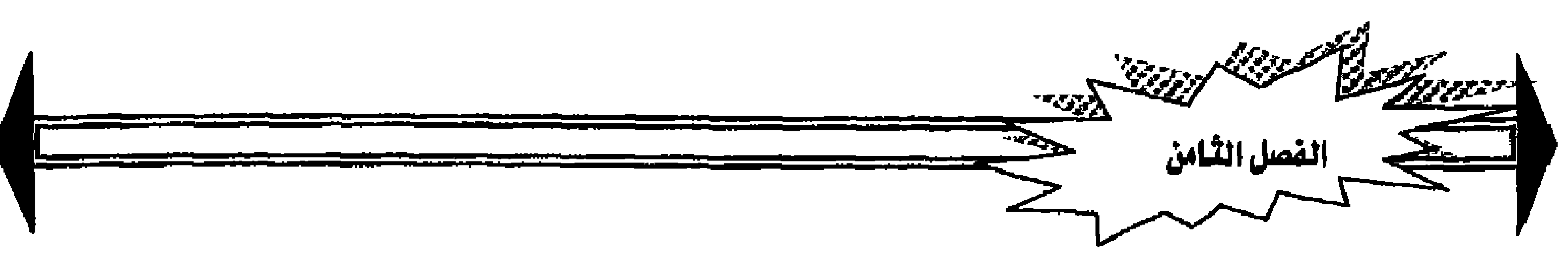
$\cap$: ب(س) × ب(س) ⟵ ب(س) راسم، حيث:

$\forall$(أ، ب) $\in$ ب(س) × ب(س) $\Longleftarrow$ $\cap$ (أ، ب)= أ $\cap$ب $\in$ ب(س).

مثال: عملية القسمة ÷ عملية ثنائية على ح*= ح/ {٠} لكنها ليست عملية ثنائية على ص، لأن:

(٣، ٤) $\in$ ص × ص، ÷ (٣، ٤)= $\frac{٣}{٤}$ $\notin$ ص





مثال: عملية الطرح – ليست عملية ثنائية على ط، لأن (٣، ٥) ∈ ط × ط

ولكن –(٣، ٥)= ٣–٥= –٢∉ط

تعريف: إذا كانت المجموعة غير الخالية س مغلقة على العملية * فهذا يعني أن * عملية ثنائية على س وفي هذه الحالة يقال إن (س، *) نظام ذو عملية.

مثال: (أ) (ص، ÷) ليس نظاماً ذا عملية، لأن ÷ ليست عملية ثنائية على ص حيث:

(س، ٠) ∈ ص × ص، لكن س ÷ ٠ غير معرفة.

(ب) (ص، *) حيث * معرفة كما يلي:

∀(س، ص) ∈ ص × ص ⇐ س*ص= $\frac{س}{ص-١}$

ليس نظاماً ذا عملية، لأن صورة العنصر (س، ١) غير معرفة وبالتالي * ليست راسماً من ص × ص إلى ص.

تعريف:

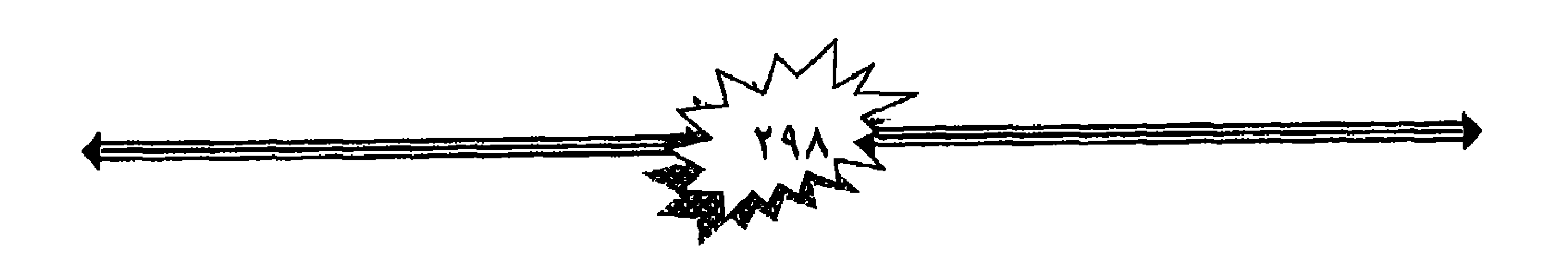
نفرض أن س[1] ≠ Φ وأن τ عملية ثنائية على س[1] يقال إن:

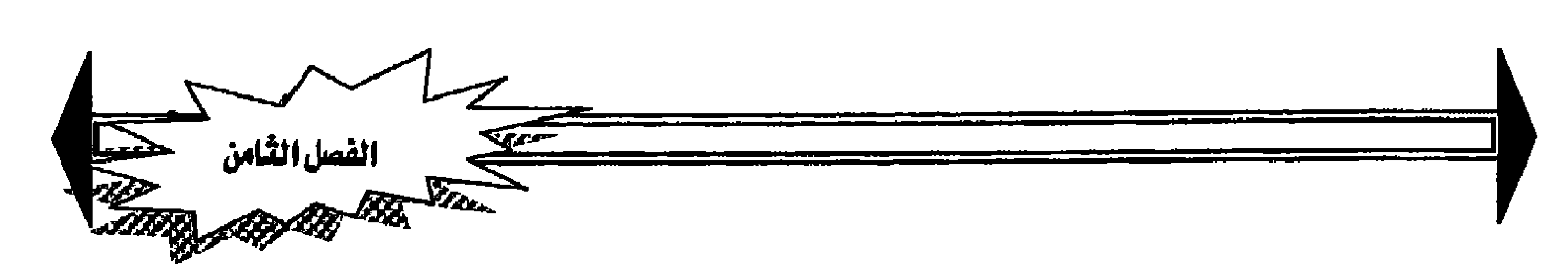
(أ) τ عملية ثنائية إبدالية (Commutative) إذا تحقق الشرط الآتي:

سτص= صτس، ∀س، ص ∈ س[1]

(ب) τ عملية ثنائية دامجة أو تجميعية (associative) إذا تحقق الشرط الآتي:

× τ(صτع)= (سτص) τع، ∀س، ص ∈ س[1]





مثال: عمليتا الجمع (+) والضرب (.) إبداليتان ودامجتان

مثال: عمليتا الاتحاد $\cup$ والتقاطع $\cap$ إبداليتان ودامجتان

مثال: العملية τ: ح × ح ⟵ح والمعرفة كما يلي:

∀س، ص ∋ ح × ح ⟸ سτص= س+٢ص

هي عملية ثنائية على ح، لكنها ليست إبدالية، حيث على سبيل المثال:

٢τ٥= ١٢ ≠ ٥ τ ٢= ٩

كما أنها ليست دامجة، فعلى سبيل المثال:

٢τ(١τ٣)= ٢τ٧= ١٦ ≠ (٢ τ ١) τ ٣= ٤τ٣

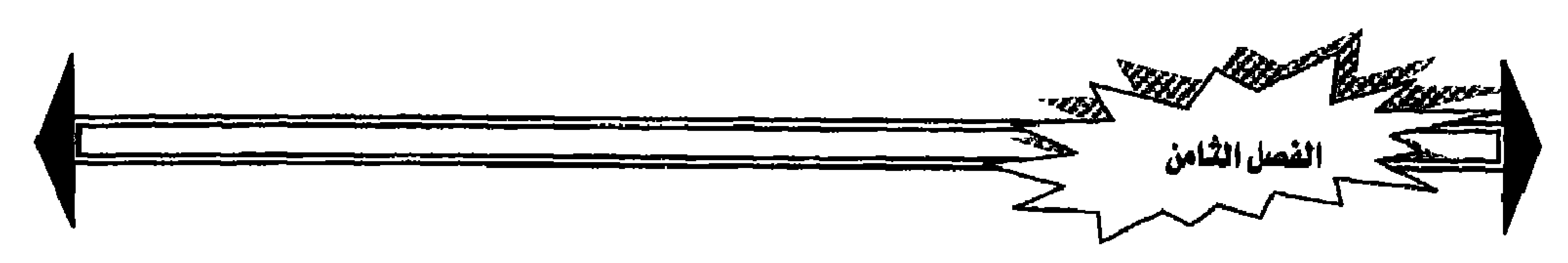
ملحوظة:

قد لا تكون العملية الثنائية من العمليات المألوفة مثل الجمع والضرب والقسمة والطرح، وقد لا تكون ذات صيغة ثابتة كما يتضح من المثال التالي:

مثال: نفرض أن ∗ عملية ثنائية على المجموعة س[1]= {١، ٢، ٣} معرفة كما هو مبين بالجدول الآتي:

∗	١	٢	٣
١	١	٢	٣
٢	٣	١	٢
٣	٢	٣	١





واضح أن * ليست + أو − أو . أو ÷ وليس لها صيغة ثابتة كما أنها ليست إبدالية حيث:

$$٢*٣= ٢ \neq ٣*٢=٣$$

كما أنها ليست تجميعية، حيث:

$$٢ * (٢ * ٣)= ١ \neq (٢ * ٢) * ٣ = ٣$$

تعريف:

نفرض أن $س^{(١)} \neq \Phi$ وأن τ عملية ثنائية على $س^{(١)}$. يسمى العنصر هـ $\in$ $س^{(١)}$ محايداً يمينياً (right unit element) للعملية الثنائية τ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$س\tau هـ= س، \forall س \in س^{(١)}$$

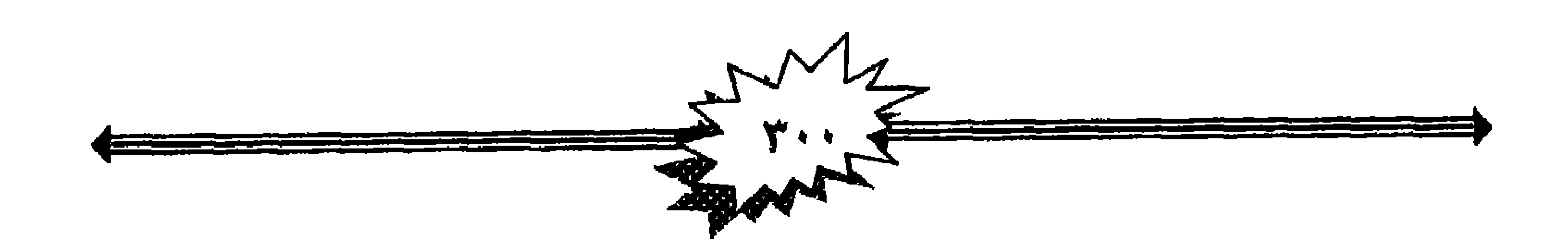
ويسمى محايداً يسارياً (left unit element) للعملية τ إذا تحقق الشرط الآتي:

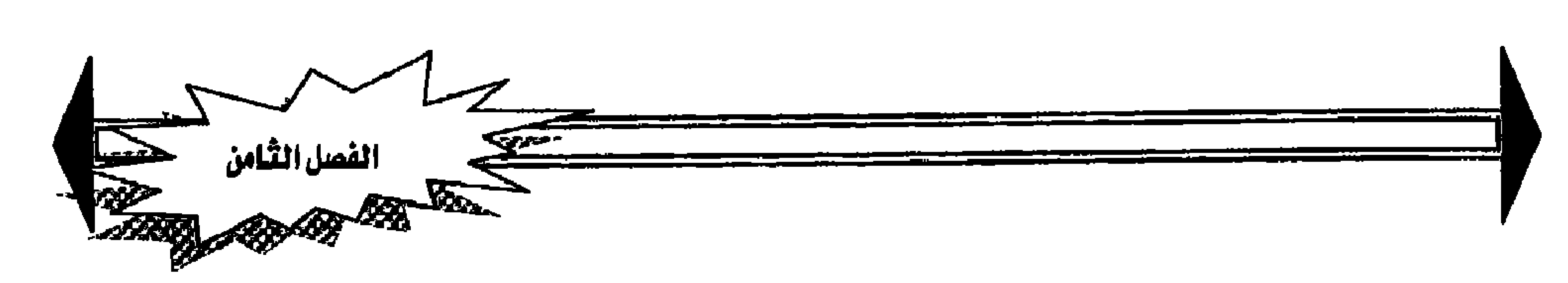
$$هـ\tau س= س، \forall س \in س^{(١)}$$

ويقال إن هـ عنصر محايد (unit element) للعملية الثنائية τ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$س\tau هـ= هـ\tau س= س، \forall س \in س^{(١)}$$

أي محايد يميني ويساري في الوقت نفسه.





مثال: (أ) مجموعة الأعداد الحقيقية تحتوي على محايد عملية الجمع، وهو العنصر ٠ ، وتحتوي على محايد عملية الضرب وهو العنصر ١.

(ب) ط لا تحتوي على محايد عملية الجمع.

(جـ) ب(س[1]) تحتوي على محايد لعملية الاتحاد ∪، وهو العنصر Φ، وتحتوي على محايد عملية التقاطع ∩ وهو المجموعة الشاملة س[1].

ملحوظة:

(أ) إذا كانت العملية الثنائية إبدالية فإن المحايد اليميني هو نفسه المحايد اليساري، هو نفسه المحايد.

(ب) إن دراسة احتواء المجموعة على محايد العملية الثنائية من عدمه يتطلب معرفة محايد العملية الثنائية أولاً.

نظرية: محايد أي عملية ثنائية وحيد إن وجد.

البرهان: نفرض أن هـ، هـَ عنصران محايدان بالنسبة للعملية الثنائية τ،

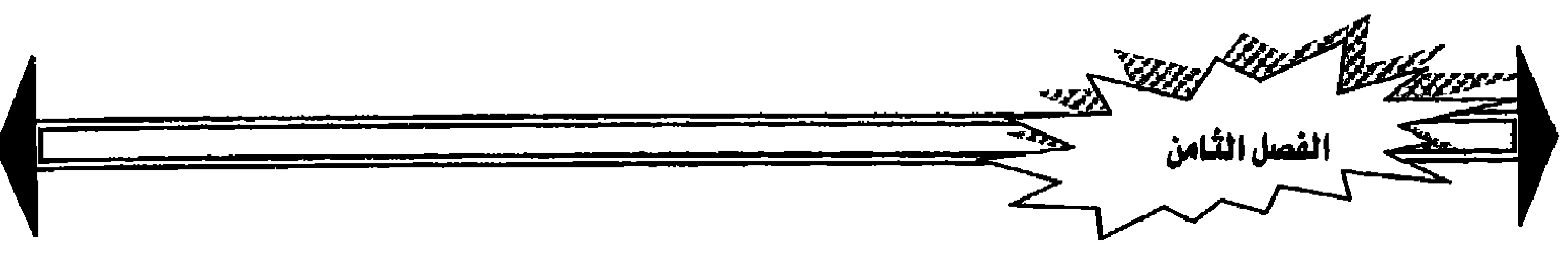
لأن هـ محايد، ∴ هـ= هـτهـَ

لأن هـَ محايد، ∴ هـَ= هـτهـَ

∴ هـ= هـَ

∴ المحايد وحيد إن وجد.





مثال: عملية الفرق التناظري Δ عملية ثنائية إبدالية على ب(س$^{(1)}$)، وأن ب(س$^{(1)}$) تحتوي على محايد Δ وهو العنصر Φ، حيث:

أ Δ Φ= أ ، $\forall$ أ $\in$ ب(س$^{(1)}$)

تعريف:

نفرض أن τ عملية ثنائية على المجموعة س$^{(1)}$، التي تحتوي على العنصر هـ (محايد العملية الثنائية τ)، العنصر سَ $\in$ س$^{(1)}$ يسمى:

(أ) معكوساً يمينياً للعنصر س إذا حقق أن سτسَ= هـ

(ب) معكوساً يسارياً للعنصر س إذا حقق أن سَτس= هـ

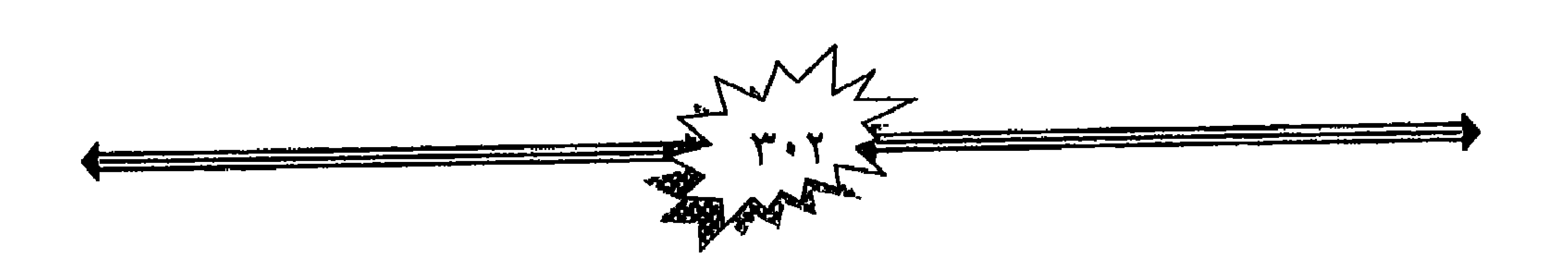
(جـ) معكوساً (inverse) للعنصر س إذا كان معكوساً يمينياً ومعكوساً يسارياً في الوقت نفسه أي إذا تحقق الشرط الآتي:

سτسَ= سَτس= هـ

ملحوظة:

(أ) عندما تكون العملية τ إبدالية فإن المعكوس اليميني هو المعكوس اليساري وهو المعكوس.

(ب) إن دراسة احتواء مجموعة ما على معكوس عنصر ما بالنسبة لعملية ثنائية ما يجب أن يسبقها تحديد محايد تلك العملية، فإن لم يوجد المحايد فلا معنى للبحث عن المعكوس. وفي حالة وجود المحايد، نحدد معكوس العنصر إن وجد، ثم نبحث في احتواء المجموعة عليه من عدمه.



مثال:

(أ) العنصر – س هو معكوس العنصر س بالنسبة لعملية الجمع + على ص، حيث س+(–س)= (–س) + س= ٠، وبالتالي فإن ص تحتوي على المعكوس الجمعي لكل عنصر بها بينما ط لا تحتوي على المعكوس الجمعي لكل عنصر غير صفري بها، فعلى سبيل المثال معكوس ٥ لكن –٥ $\notin$ ط.

(ب) ص لا تحتوي على المعكوس الضربي لأي عنصر بها سوى العنصر ١.

(جـ) ب(س) لا تحتوي على أي معكوس لأي عنصر بها بالنسبة لعملية الاتحاد سوى معكوس العنصر Φ، حيث $\Phi \cup \Phi = \Phi$

(د) ب(س[١]) لا تحتوي على اي معكوس لأي عنصر بها بالنسبة لعملية تقاطع سوى معكوس العنصر س[١]، حيث:

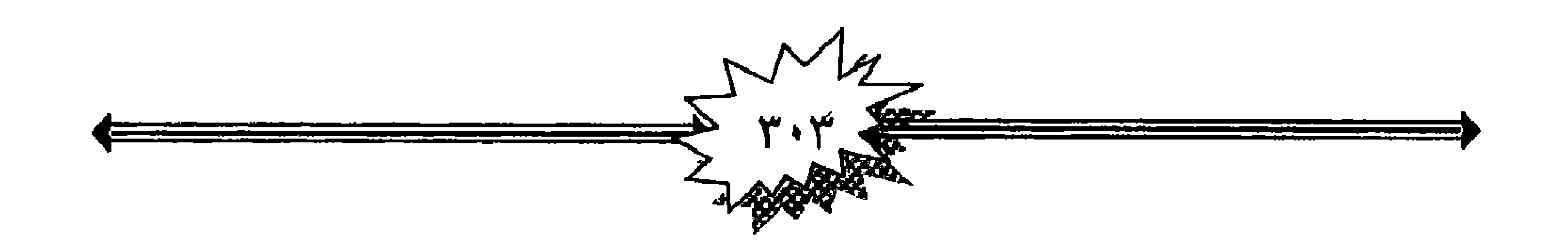
س[١] $\cap$ س[١]= س[١]

(هـ) ب(س[١]) تحتوي على معكوس لكل عنصر بالنسبة لعملية الفرق التناظري Δ حيث إن كل عنصر هو معكوس نفسه، لأن:

أ Δ أ= (أ–أ) $\cup$ (أ–أ)= Φ

نظرية:

بفرض أن τ عملية ثنائية دامجة على مجموعة س[١] وأن هـ هو محايد τ، إذن معكوس أي عنصر وحيد إن وجد.





البرهان:

نفرض أن τ عملية ثنائية دامجة على المجموعة س[1]، وأن سَ، سً معكوسان للعنصر س ∈ س[1]، باستخدام المعطيات السابقة سوف نبرهن أن سَ = سً، وذلك على النحو التالي:

سً= سً τ هـ= سً τ (س τ سَ)= (سً τ س) τ سَ

= هـ τ سَ = سَ

∴ سً = سَ

مثال:

إذا كانت τ عملية ثنائية على ح، حيث س τ ص= س + ص – س ص

ادرس العملية τ. (أي ادرس ما إذا كانت العملية إبدالية من عدمه ودامجة من عدمه وتحديد كل من المحايد إن وجد ومعكوس كل عنصر إن وجد).

الحل:

أولاً: الإبدال:

العملية الثنائية τ إبدالية لأن س τ ص= ص τ س

ثانياً: الدمج:

س τ(ص τ ع)= س τ(ص + ع – ص ع)

= س + ص + ع – ص ع – س(ص + ع – ص ع)



= س + ص + ع – (ص ع + س ص + س ص) + س ص ع...... (١)

(سτص)τع= (س+ص–س ص)τع= س+ص–س ص+ع– ع(س+ص–س ص)

= س ص + ع – (س ص + ص ع س ع) + س ص ع........... (٢)

من (١) و (٢) يتضح أن τ دامجة.

ثالثاً: المحايد:

بفرض أن هناك عنصراً محايداً نرمز له بالرمز هـ ويحقق س τ هـ= س

نحاول إيجاد قيمة هـ من صيغة العملية الثنائية وكما يلي:

س τ هـ= س + هـ – هـ س = س ⟸ هـ (١–س)= ٠

∴ هـ= ٠ هو محايد العملية، ٠ ∈ ح.

رابعاً: المعكوس:

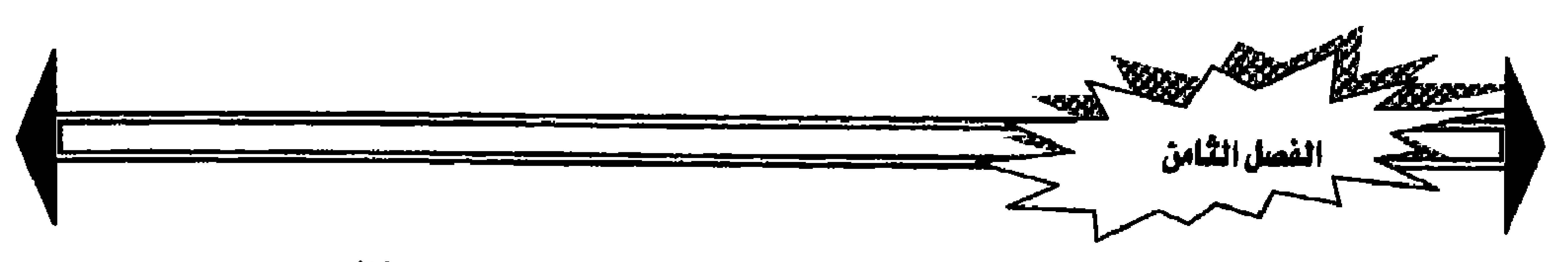
نفرض أن سَ هو معكوس العنصر س، وجود العنصر سَ من عدمه تجـدده العلاقة:

س τ سَ= هـ= ٠ والتي من خلالها نحصل على أن:

س + سَ – س سَ= ٠ ⟸ سَ= $\frac{س}{س-١}$

واضح أن لكل عنصر معكوساً عدا العنصر س= ١ فليس له معكوس.





مثال: بفرض أن τ عملية ثنائية على المجموعة غير الخالية س[1] وأن هـ هو محايد العملية الثنائية τ، حيث:

س τ(ص τ ع)= (س τ ع) τ ص، ∀س، ص، ع ∈ س[1]

أثبت أن τ إبدالية وداجة.

الحل:

أولاً: الإبدال: س τ ص= هـ τ (س τ ص)= (هـ τ ص) τ س= ص τ س

∴ τ إبدالية.

ثانياً: الدمج:

لأن τ إبدالية س τ (ص τ ع)= س τ(ع τ ص)= (س τ ص) τ ع

∴ τ داجة.

تعريف:

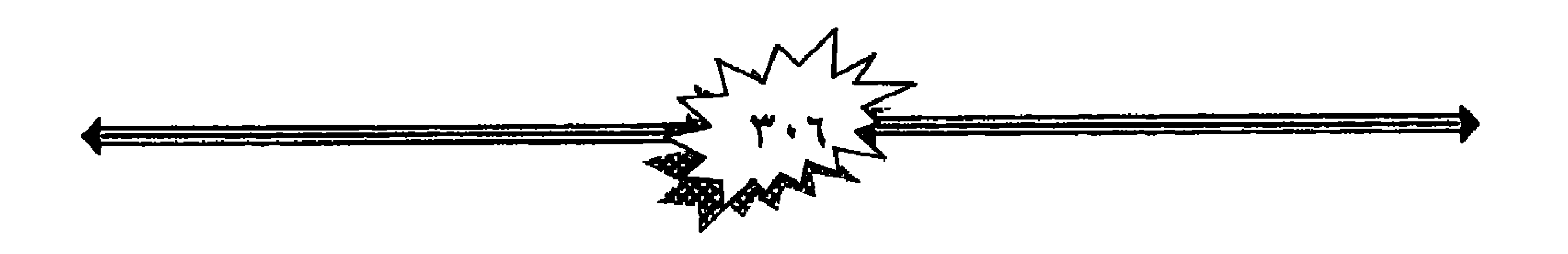
بفرض أن س[1] ≠ ∅، وأن τ، ○ عمليتان ثنائيتان على س[1].

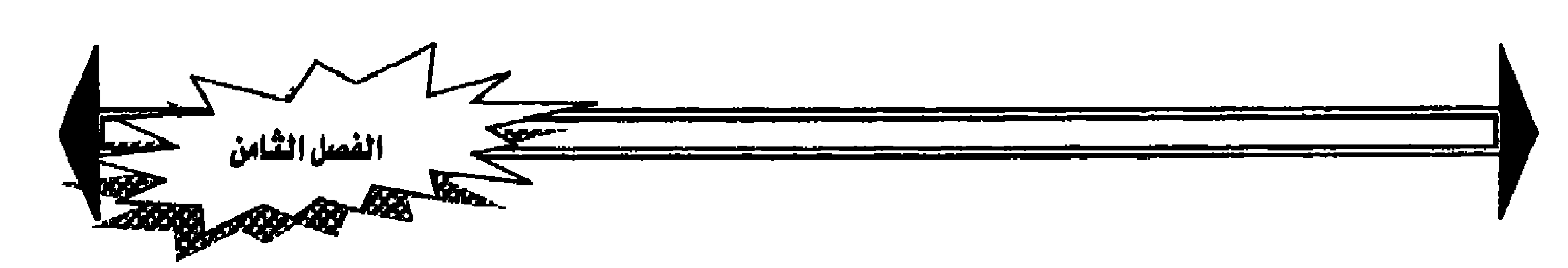
(أ) يقال إن τ عملية توزيع يميني (right distribution) على العملية ○ إذا تحقق الشرط الآتي:

(ص ○ ع) τ س= (ص τ س) ○ (ع τ س)، ∀س، ص، ع ∈ س[1]

(ب) يقال إن τ عملية توزيع يساري (lift distribtution) على العملية ○ إذا تحقق الشرط الآتي:

سτ (ص ○ ع)= (س τ ص) ○ (س τ ع)، ∀س، ص، ع ∈ س[1]





(جـ) يقال إن τ عملية توزيعية على العملية $\circ$ إذا كانت τ عملية توزيع يميني ويساري على العملية $\circ$.

مثال:

بفرض أن τ عملية ثنائية على ص معرفة كما يلي: س τ ص= س^{٢} ص، $\forall$س، ص $\in$ ص

هل τ توزيعية على +؟

الحل:

س τ(ص + ع)= س^{٢} (ص + ع)= س^{٢} ص + س^{٢} ع

= (س τ ص) + (س τ ع)

$\therefore$ τ عملية توزيع يساري على العملية +.

(س + ص) τ ع= (س + ص)^{٢} ع = (س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}) ع

= س^{٢} ع + ص^{٢} ع + ٢س ص ع

= (س τ ص) + (ص τ ع) + ٢ س ص ع

$\neq$ (س τ ص) + (ص τ ع)

$\therefore$ τ ليست عملية توزيع يميني على العملية +، وبالتالي τ ليست توزيعية على +.

ملحوظة:

إذا كانت τ عملية ثنائية توزيعية على $\circ$ فليس بالضرورة أن تكون $\circ$





توزيعية على τ، كما سيتضح من المثال التالي:

مثال: نعلم أن عملية الضرب . توزيعية على عملية الجمع +، لكن + ليست توزيعية على . فمثلاً:

(٥ + ٣) . (٣ + ٤) ≠ (٥ . ٤) + ٣ لأن ٥٦ ≠ ٢٣.

تعريف:

النظام الجبري (algebraic system) هو مجموعة غير خالية س[1] مع واحدة أو أكثر من العمليات الثنائية المعرفة على تلك المجموعة غير الخالية س[1] والعملية الثنائية * سوف نرمز له بالزوج المرتب (س[1]، *) ويسمى احياناً نظاماً رياضياً ذو عملية واحدة وبالمثل النظام الجبري المكون من المجموعة غير الخالية س[1] والعمليتين الثنائيتين * و ○ سوف نرمز له بالثلاثي (○، *، س[1]) ويسمى نظاماً ذو عمليتين.

مثال:

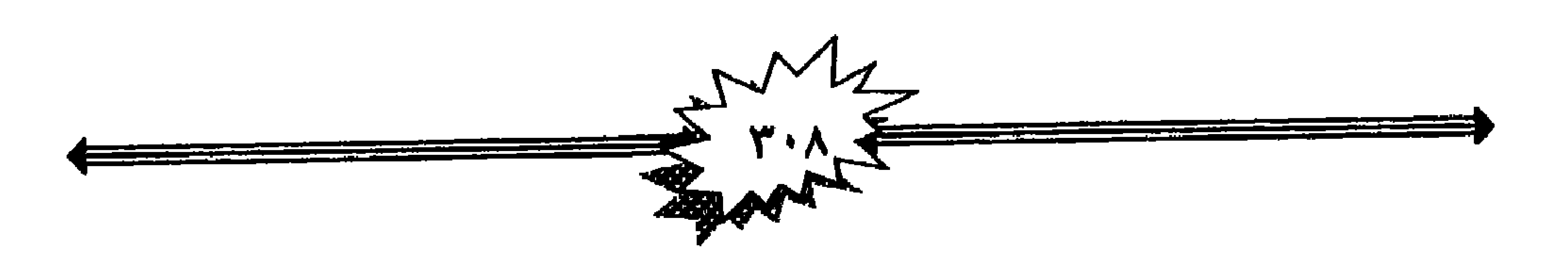
(أ) (ص، +) نظام جبري.

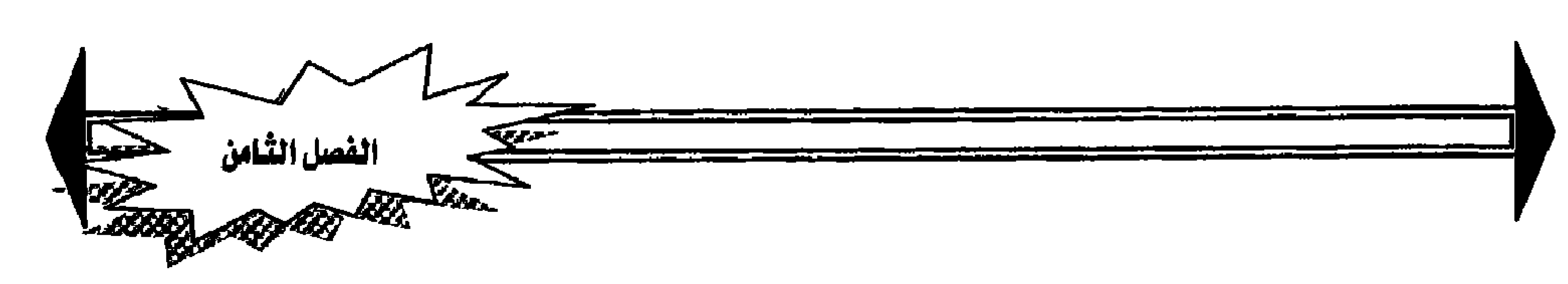
(ب) (م، ٠) نظام جبري، حيث م= {١، -١، ي، -ي}، . عملية الضرب

(جـ) (ب(س[1])، ∪) نظام جبري.

(د) (صـهـ، + ، ٠) نظام جبري، حيث صـهـ مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية.

(هـ) (صه، +، ٠) ليس نظاماً، حيث صه مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية.





ملحوظة:

قولنا إن (س، *) نظام جبري يعني أن س[1] مجموعة غير خالية، * عملية ثنائية على س[1] (أي س[1] مغلقة بالنسبة للعملية الثنائية *) إن ذكر الإغلاق رغم علمنا أنه نظام جبري لا يعني التكرار بقدر ما هو تأكيداً على ذلك.



تمارين (٤)

(١) بين أياً من العلاقات الآتية تمثل راسماً على مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

(i) ح$_{1}$= {(س، ص): س + ص^{2}= ١٦}

(ii) ح$_{2}$= {(س، ص): س + ص= ٠}

(iii) ح$_{3}$= {(س، ص): س^{2} + ص^{2}= ٤، ص ≤ ٠}

(iv) ح$_{4}$= {(س، ص): ٢س + ص^{3}= ٨}

(٢) إذا كان ق: س$^{(1)}$ ⟵ ص$^{(1)}$ راسماً أحادياً، اثبت أن:

أ= ق$^{-1}$(ق(أ)) و أ ⊆ س$^{(1)}$

(٣) إذا كان ق: س$^{(1)}$ ⟵ ص$^{(1)}$ راسماً فوقياً، اثبت أن:

ب= ق$^{-1}$(ق(ب))، ب ⊆ ص$^{(1)}$

(٤) ادرس الراسم ق: ح ⟵ ح المعرف كما يلي:

ق(س)= ٣س + ١٠، ∀س ∈ ح

(٥) ادرس الراسم : س$^{(1)}$ ⟵ ص$^{(1)}$ المعرف كما يلي:

ق(س)= $\frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} - \text{ب}}$، ∀س ∈ : س$^{(1)}$

حيث س$^{(1)}$= ح − {ب}، ص$^{(1)}$= ح − {أ}

(٦) إذا كان ق: أ ⟵ ب راسماً، وكانت ح علاقة على أ معرفة كما يلي:

س ح ص ⟺ ق(س)= ق(ص)، س، ص ∈ أ

أثبت أن:

(أ) ح علاقة تكافؤ على أ.

(ب) [س]= {ص ∈ أ، ص= ق$^{-1}$ (ق(س))}

(٧) لتكن * عملية ثنائية على المجموعة س[1]= {س، ص، ع} معرفة بالجدول الآتي:

*	س	ص	ع
س	س	ص	ع
ص	ص	ص	ص
ع	ع	ص	ع

ادرس العملية الثنائية *.

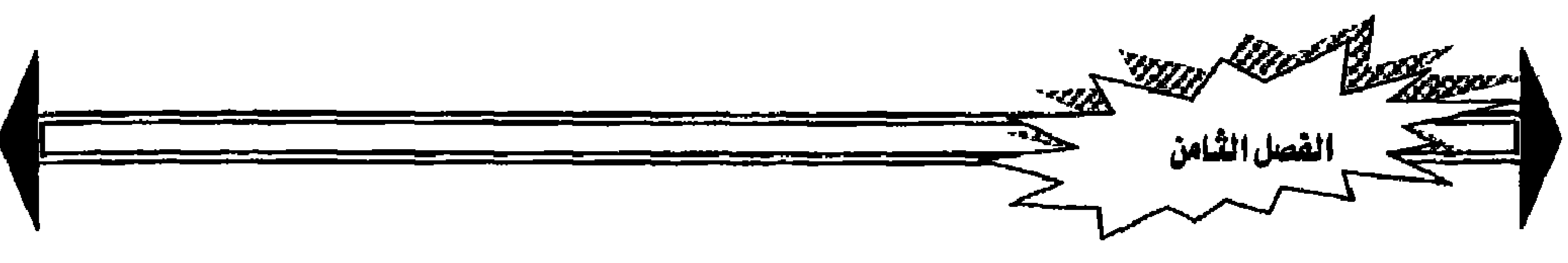
(٨) إذا كانت * عملية ثنائية على المجموعة س[1] وكان للعنصر س ∈ س[1] معكوس يساري ص، ومعكوس يميني ع، هل ص= ع دائماً؟

(٩) إذا كان ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية، أي من العمليات الآتية هي عملية ثنائية على ط:

(i) τ (س، ص)= س + ص

(ii) τ (س، ص)= س − ص





(iii) τ (س، ص)= (س−ص)^{2}

(iv) τ (س، ص)= $\sqrt{\text{س+ص}}$

(١٠) بفرض أن * عملية ثنائية على المجموعة س[1] وأن هـ هو محايد العملية الثنائية * حيث:

س * (ص * ع)= ع * (س * ص)، ∀س، ص، ع ∈ س[1]

أثبت أن * إبدالية ودامجة.

(١١) بفرض أن τ عملية ثنائية على ح بحيث:

س τ ص= س ص + ١، ∀س، ص ∈ ح

ادرس العملية τ.

(١٢) إذا كانت * عملية ثنائية على طه حيث:

ﺃ * ب= |ﺃ−ب|، ∀ ﺃ، ب ∈ ط₀ ادرس العملية *.

(١٣) بفرض أن * عملية ثنائية على ح، بحيث س * ص= ٣س − ص، ∀س، ص ∈ ح ادرس العملية *.

(١٤) إذا كانت ○ عملية ثنائية على ح بحيث، ﺃ ○ ب= ﺃ + ب + ﺃب، ∀ ﺃ، ب ∈ ح ادرس العملية ○.

(١٥) كم عملية ثنائية يمكن تعريفها على مجموعة {ﺃ، ب}؟

